

庆祝李启虎先生 80 华诞

# 非均匀对角减载最小方差无失真响应多目标分辨\*

蒋光禹<sup>1,2</sup> 孙超<sup>1,2†</sup> 刘雄厚<sup>1,2</sup> 谢磊<sup>1,2</sup> 卓颀<sup>1,2</sup>

(1 西北工业大学航海学院 西安 710072)

(2 西北工业大学 海洋声学信息感知工业和信息化部重点实验室 西安 710072)

2019 年 1 月 11 日收到

2019 年 5 月 11 日定稿

**摘要** 针对最小方差无失真响应 (Minimum Variance Distortionless Response, MVDR) 方法在起伏非相关噪声环境下多目标分辨性能严重下降的问题, 提出一种非均匀对角减载 MVDR (Inhomogeneous Diagonal Unloading MVDR, IDU-MVDR) 方法。该方法首先对协方差矩阵进行非均匀对角减载, 然后实施 MVDR 方法。各阵元上的对角减载量通过求解半正定优化问题获得, 优化问题中最大化减载量之和, 但约束减载后协方差矩阵的最小特征值是一个较小的正值。数值仿真表明, IDU-MVDR 方法可通过非均匀对角减载消除大部分非相关噪声, 但保留小部分噪声分量。因此 IDU-MVDR 方法较 MVDR 方法分辨力更高, 空间谱中背景级更低、弱目标谱峰更加明显, 并且具备一定的稳健性。海上实验结果与数值仿真相一致, 验证了 IDU-MVDR 方法的有效性。

PACS 数: 43.30, 43.60

## Minimum variance distortionless response multi-source resolving using inhomogeneous diagonal unloading

JIANG Guangyu<sup>1,2</sup> SUN Chao<sup>1,2</sup> LIU Xionghou<sup>1,2</sup> XIE Lei<sup>1,2</sup> ZHUO Jie<sup>1,2</sup>

(1 School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University Xi'an 710072)

(2 Northwestern Polytechnical University, Key Laboratory of Ocean Acoustics and Sensing,  
Ministry of Industry and Information Technology Xi'an 710072)

Received Jan. 11, 2019

Revised May 11, 2019

**Abstract** Under some underwater situations, the multi-source resolving performance of the Minimum Variance Distortionless Response (MVDR) method could seriously degrade due to the strong and inhomogeneous uncorrelated noise on the hydrophone array. To mitigate this problem, we propose an Inhomogeneous Diagonal Unloading MVDR (IDU-MVDR) method, where inhomogeneous diagonal unloading is applied on the covariance matrix before applying the MVDR method. The diagonal unloading level for each array element is obtained by solving a positive semi-definite optimization problem, where we maximize the sum of the diagonal unloading levels while constraining the minimum eigenvalue of the unloaded covariance matrix to be a small positive value. The numerical simulations suggested that the proposed IDU-MVDR method can remove most of the uncorrelated noise while remaining a small amount of which on the array elements. In consequence, the IDU-MVDR method provides higher resolution, lower background level, more distinct peaks and guaranteed robustness compared to the MVDR method. The sea trial results agreed well with the numerical simulations and proved the vitality of the IDU-MVDR method.

\* 国家自然科学基金项目 (51479169, 11534009) 资助

† 通讯作者: 孙超, csun@nwpu.edu.cn

## 引言

最小方差无失真响应<sup>[1]</sup>(Minimum Variance Distortionless Response, MVDR)方法因具有较高的分辨力,被广泛应用于水下多目标分辨<sup>[2-6]</sup>。在某些情况下,水声阵列主要受到非相关噪声的干扰。例如,当平台航速较高时,非相关流噪声较强,是水下拖曳阵的主要噪声源<sup>[7-8]</sup>。当各阵元上非相关噪声较强,信噪比较低,且各阵元上的噪声功率不一致时,MVDR方法的多目标分辨性能将严重下降。

在快拍较多的情况下,协方差矩阵中的非相关噪声分量主要位于主对角线上,此时可利用对角减载消除非相关噪声分量,提高MVDR方法的多目标分辨性能。由这一思路出发,业内学者提出了一些基于对角减载的MVDR方法<sup>[9-11]</sup>。但是,这些方法均属于均匀对角减载类方法,即各阵元上的减载量一致。在各阵元上的非相关噪声功率不同时,这类均匀对角减载方法无法有效地消除噪声分量,因此多目标分辨性能的提高十分有限。为消除各阵元上功率不同的非相关噪声,夏麾军等<sup>[12]</sup>提出了一种迭代最小二乘非均匀对角减载方法,该方法计算量小,实施简单,但需要准确已知目标个数,迭代的收敛性也无法保证。在图像处理等领域,Wright和Emmanuel等<sup>[13-14]</sup>提出稳健主成分分析(Robust Principal Component Analysis, RPCA)。给定一个由低秩矩阵和稀疏矩阵相加获得的矩阵,RPCA可恢复出构成该矩阵的低秩矩阵和稀疏矩阵。基于信号协方差矩阵的低秩特性和噪声协方差矩阵的稀疏特性,Amailland等<sup>[15]</sup>提出利用RPCA对协方差矩阵进行非均匀对角减载,RPCA方法可稳定收敛,且不需要已知目标个数,但计算量较大。由信号协方差矩阵的半正定特性出发,Hald等<sup>[16-18]</sup>提出最大化各阵元上的减载量之和,但约束减载后的协方差矩阵半正定(即最小特征值为零)的非均匀对角减载方法,该方法的减载量通过求解半正定约束优化问题获得,求解过程可稳定收敛,计算量较小,且不需要已知目标个数。然而,文献12、文献15—文献18中的方法并不是为后续实施MVDR方法设计的。由于这些方法尽可能多地移除协方差矩阵对角线上的噪声分量,在使用其进行非均匀对角减载后,将导致减载后的协方差矩阵的最小特征值小于或等于0,因而协方差矩阵无法求逆,MVDR方法无法实施。

针对已有方法的不足,提出一种非均匀对角减载MVDR方法。该方法在减载处理中最大化各阵元

上的减载量之和,但约束减载后协方差矩阵的最小特征值是一个较小的正值,然后利用减载后的协方差矩阵实施MVDR方法。减载量的求解问题可转化为半正定约束优化问题,计算量小,可稳定收敛且不需要额外先验信息。区别于已有非均匀对角减载方法,所提方法因约束减载后协方差矩阵的最小特征值为一个较小的正值,保证了减载后协方差矩阵可逆,并且在消除大部分噪声的同时仍保留了部分噪声分量。因此,减载后仍可实施MVDR方法,且其性能因大部分噪声被消除而提升。另外,通过控制各阵元上保留噪声功率的大小,可保障MVDR方法的稳健性。数值仿真表明,所提方法较MVDR方法分辨力更高,空间谱背景级更低、弱目标谱峰更加明显,同时具备一定的稳健性。海上实验获得了与数值仿真结果相一致的结果,验证了该方法的有效性。

## 1 阵列信号模型与MVDR方法

### 1.1 阵列信号模型

考虑一个 $M$ 元均匀直线阵,阵元间距为 $d$ 。假设来波信号为 $K$ 个中心频率相同且互不相关的窄带随机信号,各阵元上的接收噪声为互不相关的高斯白噪声,信号与噪声之间相互独立。则当快拍数为 $L$ 时,阵列接收信号可表示为:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_{s,k}) \otimes \mathbf{s}_k + \mathbf{N} \in \mathbb{C}^{M \times L}, \quad (1)$$

式中:

$$\mathbf{a}(\theta_{s,k}) = \begin{bmatrix} 1 & e^{i \frac{2\pi d \cos(\theta_{s,k})}{\lambda}} & \dots & e^{i(M-1) \frac{2\pi d \cos(\theta_{s,k})}{\lambda}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$$

为阵列流形向量, $\theta_{s,k}$ 为第 $k$ 个信号的来波方向与直线阵之间的夹角, $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位, $\lambda = c/f$ 为波长, $c$ 为声速, $f$ 为频率, $(\cdot)^T$ 表示转置; $\otimes$ 表示Kronecker积; $\mathbf{s}_k \in \mathbb{C}^{1 \times L}$ 为第 $k$ 个信号的快拍序列, $\mathbf{s}_k$ 中的元素 $s_{k,l}$ ( $l=1, \dots, L$ )服从均值为0、方差为 $\sigma_{s,k}^2$ 的复高斯分布; $\mathbf{N} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_M]^T \in \mathbb{C}^{M \times L}$ 为 $M \times L$ 维接收噪声矩阵, $\mathbf{n}_m \in \mathbb{C}^{1 \times L}$ 为第 $m$ 个阵元上的噪声快拍序列, $\mathbf{n}_m$ 中的元素 $n_{m,l}$ ( $l=1, \dots, L$ )服从均值为0、方差为 $\sigma_{n,m}^2$ 的复高斯分布。则接收数据的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{X} \mathbf{X}^H}{L} \in \mathbb{C}^{M \times M}, \quad (2)$$

式中, $(\cdot)^H$ 表示共轭转置。则在快拍数趋近于无穷,即 $L \rightarrow \infty$ 的情况下,有:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{ss} + \mathbf{R}_{nn}, \quad (3)$$

$$\mathbf{R}_{ss} = \sum_{k=1}^K \sigma_{s,k}^2 \mathbf{a}(\theta_{s,k}) \mathbf{a}^H(\theta_{s,k}), \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_{nn} = \text{diag}(\sigma_{n,1}^2, \sigma_{n,2}^2, \dots, \sigma_{n,M}^2), \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{R}_{ss}$  和  $\mathbf{R}_{nn}$  分别表示信号协方差矩阵和噪声协方差矩阵。由式 (5) 可以看出, 此时协方差矩阵中的噪声分量集中在主对角线上。一般情况下, 各阵元上的噪声功率互不相同, 即对于  $m_1 \neq m_2$ ,  $\sigma_{n,m_1}^2 \neq \sigma_{n,m_2}^2$ 。在各阵元上的噪声功率相同的特殊情况下, 式 (5) 退化为:

$$\mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{I}, \quad (6)$$

式中,  $\sigma_n^2$  为各阵元上的噪声功率,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵。

## 1.2 MVDR 方法

MVDR 方法通过波束扫描获得空间谱, 以空间谱中的谱峰指示不同方位上的目标, 完成多目标分辨。当波束指向感兴趣方位 (Direction Of Interest, DOI) 时, MVDR 波束形成器的加权向量为:

$$\mathbf{w}_{\text{MVDR}}(\theta_{\text{DOI}}) = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_{\text{DOI}})}{\mathbf{a}^H(\theta_{\text{DOI}}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_{\text{DOI}})}, \quad (7)$$

则由波束扫描获得的空间谱为:

$$P(\theta) = \mathbf{w}_{\text{MVDR}}^H(\theta) \mathbf{R} \mathbf{w}_{\text{MVDR}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}. \quad (8)$$

对波束形成类多目标分辨方法, 波数形成器的干扰抑制能力越强, 多目标分辨方法的分辨力越高。因 MVDR 波束形成器具有较强的干扰抑制能力, 多目标分辨中 MVDR 方法也具有较高的分辨力。

## 2.1 非均匀对角减载 MVDR 方法

### 2.1 非相关噪声对 MVDR 方法分辨力的影响

首先考虑各阵元非相关噪声功率相等情况。假设快拍数趋近于无穷, 对  $\mathbf{R}$  进行特征分解, 有:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Gamma} \mathbf{U}^H = \sum_{m=1}^M \gamma_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H, \quad (9)$$

式中:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M], \quad \mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M),$$

$\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_K$  为与  $K$  个信号相对应的特征值,  $\gamma_{K+1} \geq \dots \geq \gamma_M$  为与非相关噪声相对应的特征值,  $\mathbf{u}_m$  为与  $\gamma_m$  相对应的特征向量。则:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{U} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{U}^H = \sum_{m=1}^M \frac{1}{\gamma_m} \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H = \frac{1}{\gamma_{\min}} \left( \mathbf{I} - \sum_{m=1}^M \frac{\gamma_m - \gamma_{\min}}{\gamma_m} \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \right), \quad (10)$$

式中,  $\gamma_{\min}$  是最小特征值, 即  $\gamma_{\min} = \gamma_M$ 。

将式 (10) 代入式 (7), 并省略分母上的标量得:

$$\mathbf{w}_{\text{MVDR}}(\theta_{\text{DOI}}) = \mathbf{a}(\theta_{\text{DOI}}) - \sum_{m=1}^M \frac{\gamma_m - \gamma_{\min}}{\gamma_m} \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \mathbf{a}(\theta_{\text{DOI}}). \quad (11)$$

该加权向量对应的波束响应为:

$$\begin{aligned} B_{\text{MVDR}}(\theta_{\text{DOI}}, \theta) &= \mathbf{w}_{\text{MVDR}}^H(\theta_{\text{DOI}}) \mathbf{a}(\theta) = \\ &= \mathbf{a}^H(\theta_{\text{DOI}}) \mathbf{a}(\theta) - \sum_{m=1}^K \frac{\gamma_m - \gamma_{\min}}{\gamma_m} \mathbf{a}^H(\theta_{\text{DOI}}) \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \mathbf{a}(\theta) - \\ &= \sum_{m=K+1}^M \frac{\gamma_m - \gamma_{\min}}{\gamma_m} \mathbf{a}^H(\theta_{\text{DOI}}) \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \mathbf{a}(\theta) = \\ &= B_0(\theta_{\text{DOI}}, \theta) - \sum_{m=1}^K \frac{\gamma_m - \gamma_{\min}}{\gamma_m} \rho_m B_{\text{eig},m}(\theta) - \\ &= \sum_{m=K+1}^M \frac{\gamma_m - \gamma_{\min}}{\gamma_m} \rho_m B_{\text{eig},m}(\theta), \end{aligned} \quad (12)$$

式中,  $B_0(\theta_{\text{DOI}}, \theta) = \mathbf{a}^H(\theta_{\text{DOI}}) \mathbf{a}(\theta)$  为常规波束响应,  $\rho_m = \mathbf{a}^H(\theta_{\text{DOI}}) \mathbf{u}_m$  表示  $\mathbf{a}^H(\theta_{\text{DOI}})$  与  $\mathbf{u}_m$  之间的相关性,  $B_{\text{eig},m}(\theta) = \mathbf{u}_m^H \mathbf{a}(\theta)$  为第  $m$  个特征波束, 即以特征向量  $\mathbf{u}_m$  为加权向量的波束响应。

当波束指向方向不同于信号来波方向, 即  $\theta_{\text{DOI}} \neq \theta_{s,k}$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ) 时,  $K$  个信号可视为干扰。由于  $\gamma_{K+1} = \dots = \gamma_M$ , 式 (12) 中第 3 个等号右端噪声特征波束的贡献为 0, 则式 (12) 可改写为:

$$\begin{aligned} B_{\text{MVDR}}(\theta_{\text{DOI}}, \theta) &= B_0(\theta_{\text{DOI}}, \theta) - B_I(\theta) = \\ &= B_0(\theta_{\text{DOI}}, \theta) - \sum_{m=1}^K \alpha_m B_{\text{eig},m}(\theta), \end{aligned} \quad (13)$$

即 MVDR 波束响应等于常规波束响应减去干扰特征波束的加权和, 加权系数为:

$$\alpha_m = \left( 1 - \frac{\gamma_{\min}}{\gamma_m} \right) \rho_m. \quad (14)$$

由于  $K$  个干扰特征值对应的特征向量张成的子空间等于干扰方向上阵列流形向量张成的子空间, 即  $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_K\} = \text{span}\{\mathbf{a}(\theta_{s,1}), \dots, \mathbf{a}(\theta_{s,K})\}$ ,  $B_I(\theta)$  将在干扰方向  $\{\theta_{s,1}, \dots, \theta_{s,K}\}$  上形成峰值, 相应地  $B_{\text{MVDR}}(\theta_{\text{DOI}}, \theta)$  将在干扰方向上形成凹槽。由式 (14)

可知, 凹槽的深度与  $\gamma_m/\gamma_{\min}$  成正比。因此, MVDR 波束形成器的干扰抑制能力随干扰噪声比 (Interference to Noise Ratio, INR) 的增加而增强。多目标分辨中, 所有目标来波均视为有用信号。则在多目标分辨中, MVDR 方法的分辨力随信噪比 (Signal to Noise Ratio, SNR) 的增加而增强。

在各阵元上非相关噪声功率不相等的情况下,  $\gamma_{K+1} \neq \dots \neq \gamma_M$ , 此时式 (12) 中噪声特征波束将对 MVDR 波束响应造成影响。由于噪声分量所对应的特征波束是随机变量, MVDR 波束响应将受其影响偏离理想性能, 且噪声特征值的分散程度  $\gamma_{K+1}/\gamma_M$  越大, MVDR 波束响应受影响的程度越大<sup>[19]</sup>, 多目标分辨的性能也越差。

由式 (5) 可知, 非相关噪声分量集中在协方差矩阵的主对角线上。则根据本小节分析, 在各阵元上的非相关噪声较强, 且功率不一致时, 可通过非均匀对角减载消除各阵元上的大部分噪声, 减载后各阵元上仅保留一部分功率较小且一致的噪声, 此时 MVDR 方法的分辨力提高且性能不受噪声特征波束的影响, 同时空间谱的背景级因噪声被抑制而降低, 弱目标谱峰更加明显。

## 2.2 非相关噪声对 MVDR 方法稳健性的影响

理论上, 各阵元上保留的噪声功率越小, MVDR 方法的分辨力越高且空间谱的背景级越低, 弱目标谱峰越明显。但是, 各阵元上保留的噪声功率同时影响 MVDR 方法的稳健性。多目标分辨中 MVDR 方法的稳健性可由波束扫描指向不同方位时 MVDR 波束形成器的灵敏度  $T_{se}$  描述<sup>[20]</sup>, 其定义为:

$$T_{se} = \|\mathbf{w}_{\text{MVDR}}\|^2, \quad (15)$$

$T_{se}$  越小, 稳健性越高, MVDR 方法抵抗阵列流形误差的能力越强。假定非均匀对角减载后, 各阵元上保留的噪声功率相等, 即  $\sigma_{n\text{-res-IDU},m}^2 = \sigma_{n\text{-res-IDU}}^2$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ), 则减载后的协方差矩阵可表示为:

$$\mathbf{R}_{\text{IDU}} = \mathbf{R}_{ss} + \sigma_{n\text{-res-IDU}}^2 \mathbf{I}, \quad (16)$$

则灵敏度  $T_{se}$  为:

$$T_{se} = \mathbf{w}_{\text{MVDR}}^H \mathbf{w}_{\text{MVDR}} = \frac{\mathbf{a}^H (\mathbf{R}_{ss} + \sigma_{n\text{-res-IDU}}^2 \mathbf{I})^{-2} \mathbf{a}}{[\mathbf{a}^H (\mathbf{R}_{ss} + \sigma_{n\text{-res-IDU}}^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}]^2}. \quad (17)$$

可以证明<sup>[21]</sup>,  $T_{se}$  是  $\sigma_{n\text{-res-IDU}}^2$  的单调减函数。 $\sigma_{n\text{-res-IDU}}^2$  越大,  $T_{se}$  越小, 稳健性越高。因此, 各阵元上保留的噪声功率不可过小, 以保证 MVDR 方法的稳健性。

## 2.3 非均匀对角减载 MVDR 方法

根据 2.1 和 2.2 小节的分析, 通过非均匀对角减载消除起伏非相关噪声可提高 MVDR 方法的分辨力、降低空间谱的背景级, 但各阵元上仍需保留一定功率的噪声以保证稳健性。因此, 本文提出最大化各阵元上的减载量之和, 同时约束减载后的协方差矩阵的最小特征值为一个较小的正值, 最后利用减载后的协方差矩阵实施 MVDR 方法。求解各阵元上减载量  $d_{\text{IDU},m}$  的问题可表示为以下半正定优化问题:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{m=1}^M d_{\text{IDU},m}, \\ & \text{s.t. } \mathbf{R} - \text{diag}(d_{\text{IDU},1}, d_{\text{IDU},2}, \dots, d_{\text{IDU},M}) - \delta \mathbf{I} \geq 0, \\ & \delta = \varepsilon \min_m \{r_{mm}\}, \end{aligned} \quad (18)$$

式中  $\geq 0$  表示矩阵半正定,  $r_{mm}$  表示协方差矩阵  $\mathbf{R}$  中第  $m$  个对角线元素,  $\varepsilon$  决定减载后协方差矩阵最小特征值  $\delta$  的大小。该半正定优化问题是一个凸优化问题, 可通过常见的凸优化工具箱, 如 CVX<sup>[22]</sup> 等求解。减载后的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R}_{\text{IDU}} = \mathbf{R} - \text{diag}(d_{\text{IDU},1}, d_{\text{IDU},2}, \dots, d_{\text{IDU},M}). \quad (19)$$

在快拍数趋近于无穷的情况下, 减载后协方差矩阵的特征值降序分布将变为:

$$M \{\sigma_{s,k}^2\}_1 + \delta, \dots, M \{\sigma_{s,k}^2\}_K + \delta, \dots, \delta, \quad (20)$$

式中,  $\{\cdot\}_i$  表示集合中第  $i$  大的数。则减载后协方差矩阵为:

$$\mathbf{R}_{\text{IDU}} = \mathbf{R}_{ss} + \delta \mathbf{I}, \quad (21)$$

即减载后各阵元上保留了功率为  $\delta$  的噪声。

由式 (21) 可知, 当  $\delta < \min_m \{\sigma_{n,m}^2\}$  时, 对角减载量  $\{d_{\text{IDU},m}\}$  均为正数, 各阵元上的非相关噪声得到了有效的消除。将

$$\delta = \varepsilon \min_m \{r_{mm}\} = \varepsilon \left( \sum_{k=1}^K \sigma_{s,k}^2 + \min_m \{\sigma_{n,m}^2\} \right)$$

代入  $\delta < \min_m \{\sigma_{n,m}^2\}$  有:

$$\min_m \{\sigma_{n,m}^2\} > \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_k \sigma_{s,k}^2. \quad (22)$$

相反地, 当  $\delta > \max_m \{\sigma_{n,m}^2\}$  时, 对角减载量  $\{d_{\text{IDU},m}\}$  均为负数, 各阵元上的非相关噪声反而增强了。将

$$\delta = \varepsilon \left( \sum_{k=1}^K \sigma_{s,k}^2 + \min_m \{\sigma_{n,m}^2\} \right)$$

代入  $\delta > \max_m \{\sigma_{n,m}^2\}$  有:

$$\max_m \{\sigma_{n,m}^2\} < \varepsilon \left( \sum_{k=1}^K \sigma_{s,k}^2 + \min_m \{\sigma_{n,m}^2\} \right). \quad (23)$$

结合式 (23) 和  $\min_m \{\sigma_{n,m}^2\} \leq \max_m \{\sigma_{n,m}^2\}$  有:

$$\max_m \{\sigma_{n,m}^2\} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{k=1}^K \sigma_{s,k}^2. \quad (24)$$

此外, 当  $\min_m \{\sigma_{n,m}^2\} < \delta < \max_m \{\sigma_{n,m}^2\}$ , 对角减载量  $\{d_{\text{IDU},m}\}$  中兼有正数和负数, 即某些阵元上的非相关噪声减弱了, 而另外阵元上的非相关噪声增强了。

结合 2.2 小结可知, 当噪声较强, MVDR 方法的稳健性仍有余量时, 该算法实施减载; 而当噪声较弱, MVDR 方法的稳健性不足时, 该算法在部分或全部阵元上实施加载, 即该算法实施减载的前提是保证 MVDR 方法的稳健性。本文中, 仅考虑噪声较强、信噪比较低的场景, 因此只讨论减载问题, 对加载问题不做研究。由上文分析可知, 实施减载的门限由  $\varepsilon$  决定, 减载后各阵元上的剩余噪声功率为  $\delta = \varepsilon(\sum_{k=1}^K \sigma_{s,k}^2 + \min_m \{\sigma_{n,m}^2\})$ 。2.1 节和 2.2 节的分析表明, 剩余噪声功率越大, MVDR 方法的稳健性越好, 抵抗阵列流形误差的能力越强, 但多目标分辨性能越差。设定  $\varepsilon$  实际是在折中 MVDR 方法的稳健性和多目标分辨性能。因此, 当阵列流形误差较大时, 应选择较大的  $\varepsilon$  以保证稳健性, 否则可选择较小的  $\varepsilon$  以获得较好的多目标分辨性能。又因为剩余噪声功率与  $\min_m \{\sigma_{n,m}^2\}$  成正比, 在阵列流形误差一定的情况下, 噪声较弱时, 应选择较大的  $\varepsilon$  以保证稳健性; 噪声较强时, 可选择较小的  $\varepsilon$  以获得更好的多目标分辨性能。本文给出  $\varepsilon$  的经验取值范围为 0.01~0.1。

利用对角减载后的协方差矩阵  $\mathbf{R}_{\text{IDU}}$  构造 MVDR 波束扫描向量:

$$\mathbf{w}_{\text{IDU-MVDR}}(\theta) = \frac{\mathbf{R}_{\text{IDU}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{\text{IDU}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}. \quad (25)$$

通过波束扫描得到空间谱为:

$$P_{\text{IDU-MVDR}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{\text{IDU}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}. \quad (26)$$

作为总结, 图 1 给出了本文提出的非均匀对角减载 MVDR (Inhomogeneous Diagonal Unloading MVDR, IDU-MVDR) 方法的处理流程图。

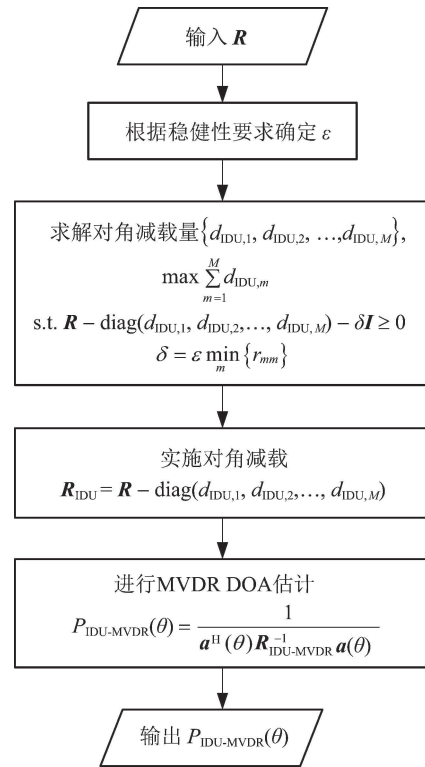


图 1 IDU-MVDR 方法处理流程图

### 3 数值仿真与分析

本节通过数值仿真验证 IDU-MVDR 方法的有效性。仿真中接收阵均为 20 元均匀直线阵, 阵元间距  $d = \lambda/2$ 。由于各阵元上的噪声功率互不相同, 对于第  $k$  个入射信号, 定义平均输入信噪比为:

$$\text{SNR}_{\text{ave}} = 10 \lg \frac{\sigma_{s,k}^2}{\sigma_{n,m}^2} = 10 \lg \frac{\sigma_{s,k}^2}{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sigma_{n,m}^2}. \quad (27)$$

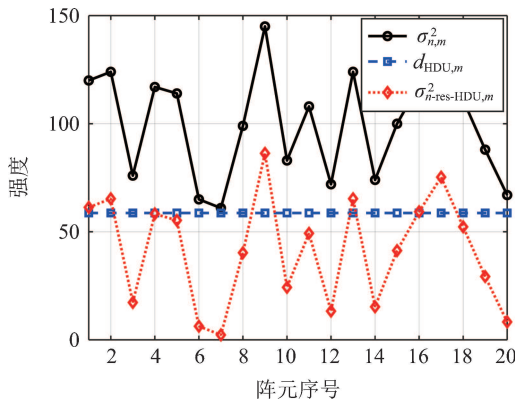
#### 3.1 采用理论协方差矩阵 IDU-MVDR 方法的性能

本小节首先考虑理论协方差已知, 即  $L \rightarrow \infty$  的情况, 所有协方差矩阵均利用式 (3)~(5) 直接合成得到, 以验证 IDU-MVDR 方法的理论性能。

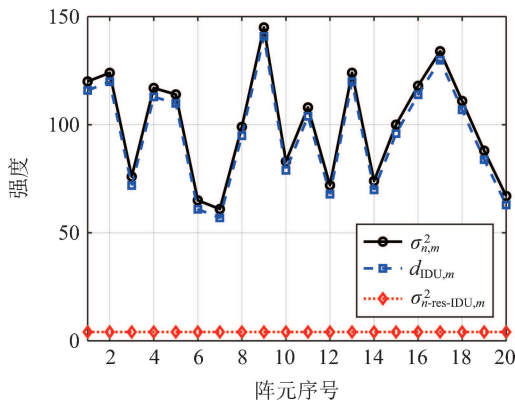
假设 3 个非相关信号的来波方向分别为  $\{\theta_{s,k}\} = \{60^\circ, 90^\circ, 94^\circ\}$ , 功率分别为  $\{\sigma_{s,k}^2\} = \{1, 10, 10\}$ , 各阵元上的输入噪声功率分别为  $\{\sigma_{n,m}^2\} = \{120, 124, 76, 117, 114, 65, 61, 99, 145, 83, 108, 72, 124, 74, 100, 118, 134, 111, 88, 67\}$ , 且  $\bar{\sigma}_{n,m}^2 = 100$ 。则对于 3 个入射信号而言, 平均输入信噪比分别为  $\{\text{SNR}_{\text{ave}}\} = \{-20 \text{ dB}, -10 \text{ dB}, -10 \text{ dB}\}$ 。如无特殊说明, 下文中保持以上仿真参数不变。

首先, 以均匀对角减载<sup>[10-11]</sup>作为对比, 仿真分

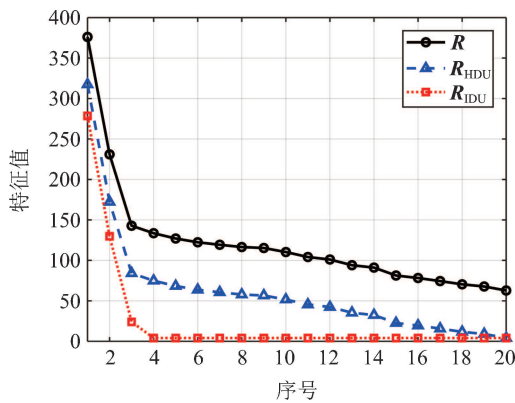
析非均匀对角减载对非相关噪声的抑制能力。均匀对角减载在各阵元上的减载量、减载后各阵元上的剩余噪声强度和减载后的协方差矩阵分别以  $d_{\text{HDU},m}$ 、 $\sigma_{n\text{-res-HDU},m}^2$  和  $R_{\text{HDU}}$  表示。为保证比较的相对公平，令均匀和非对角减载后协方差矩阵的最小特征值相同。取  $\varepsilon=0.05$ ，图 2(a) 和图 2(b) 分别给出了均匀和非均匀对角减载中各阵元上的减载量及减载前后各阵元上的噪声功率；图 2(c) 对比了减载前后协方差矩阵的特征值分布。



(a)  $\sigma_{n,m}^2$ 、 $d_{\text{HDU},m}$  和  $\sigma_{n\text{-res-HDU},m}^2$



(b)  $\sigma_{n,m}^2$ 、 $d_{\text{IDU},m}$  和  $\sigma_{n\text{-res-IDU},m}^2$



(c)  $R$ 、 $R_{\text{HDU}}$  和  $R_{\text{IDU}}$  的特征值分布

图 2 均匀和非均匀对角减载前后，各阵元上的噪声功率变化图和协方差矩阵的特征值变化图

对比图 2(a) 和图 2(b) 可以看出，各阵元上的  $d_{\text{HDU},m}$  整体小于  $d_{\text{IDU},m}$ ；均匀对角减载后各阵元上的  $\sigma_{n\text{-res-HDU},m}^2$  较强且起伏较大；非均匀对角减载后各阵元上的  $\sigma_{n\text{-res-IDU},m}^2$  较弱且大小一致。因此，在各阵元上非相关噪声功率不一致的情况下，非均匀减载可移除更多噪声分量，具有更强的噪声抑制能力。图 2(c) 中， $R_{\text{HDU}}$  和  $R_{\text{IDU}}$  的特征值均小于  $R$  的特征值，且最小特征值均为  $\gamma_{\min} = \varepsilon \min_m \{r_{mm}\} = 4.1$ ；均匀减载后各阵元上  $\sigma_{n\text{-res-HDU},m}^2$  较强且起伏较大，导致  $R_{\text{HDU}}$  的前  $M - K - 1$  个噪声特征值较大且取值不等；而非均匀减载后各阵元上的  $\sigma_{n\text{-res-IDU},m}^2$  较弱且大小一致，因此  $R_{\text{IDU}}$  的前  $M - K - 1$  个噪声特征值较小，且取值与最小特征值相等。

图 3 比较了 CBF、MVDR、均匀对角减载 MVDR (Homogeneous Diagonal Unloading MVDR, HDU-MVDR) 和 IDU-MVDR 方法获得的空间谱，波束扫描的角度间隔为  $1^\circ$ 。可以看出，MVDR 与 CBF 的空间谱十分相似，未能成功分辨来自  $90^\circ$  和  $94^\circ$  的目标，且背景级较高， $60^\circ$  方向上的弱目标谱峰十分不明显。这是因为 3 个目标的阵元输入信噪比均较低且阵元噪声功率起伏较大，导致 MVDR 的性能严重下降。相比之下，HDU-MVDR 和 IDU-MVDR 的性能均优于 MVDR。但是，由于非均匀对角减载移除了更多噪声分量，IDU-MVDR 的空间谱更低， $60^\circ$  方向上的弱目标谱峰更加明显，且两相近目标间的凹槽明显更深，分辨力更高。

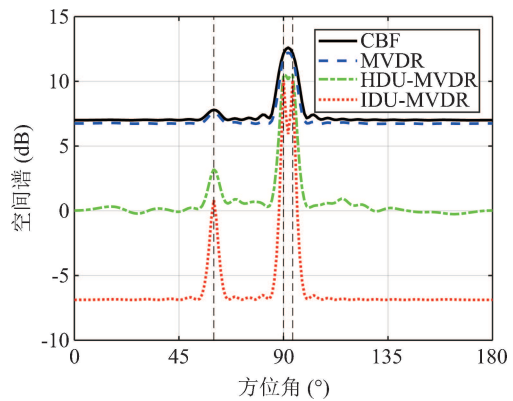


图 3 CBF、MVDR、HDU-MVDR 和 IDU-MVDR 空间谱

为了分析  $\varepsilon$  对 IDU-MVDR 性能的影响，图 4(a) 和图 4(b) 分别给出了  $\varepsilon$  取 0.1, 0.05, 0.01 时 IDU-MVDR 的空间谱和波束指向不同方向时的敏感度。

由图 4(a) 可以看出，仿真中  $\varepsilon$  取 0.1, 0.05, 0.01 时 IDU-MVDR 均可分辨来自  $90^\circ$  和  $94^\circ$  的目标，但是两目标间空间谱的凹槽深度随着  $\varepsilon$  的减小而加深，说明 IDU-MVDR 的分辨力随着  $\varepsilon$  的减小而增

强。同时, IDU-MVDR 空间谱的背景级随着  $\varepsilon$  的减小而降低, 分别为  $-3.9$  dB,  $-6.9$  dB,  $-13.9$  dB,  $60^\circ$  方向上弱目标的谱峰更加明显。由图 4(b) 可以看出, 在目标方位附近  $T_{se}$  明显随着  $\varepsilon$  的减小而增加, 说明  $\varepsilon$  的取值越小 IDU-MVDR 的稳健性越差。当远离目标方位时  $T_{se}$  较小, 且几乎不受  $\varepsilon$  取值的影响。

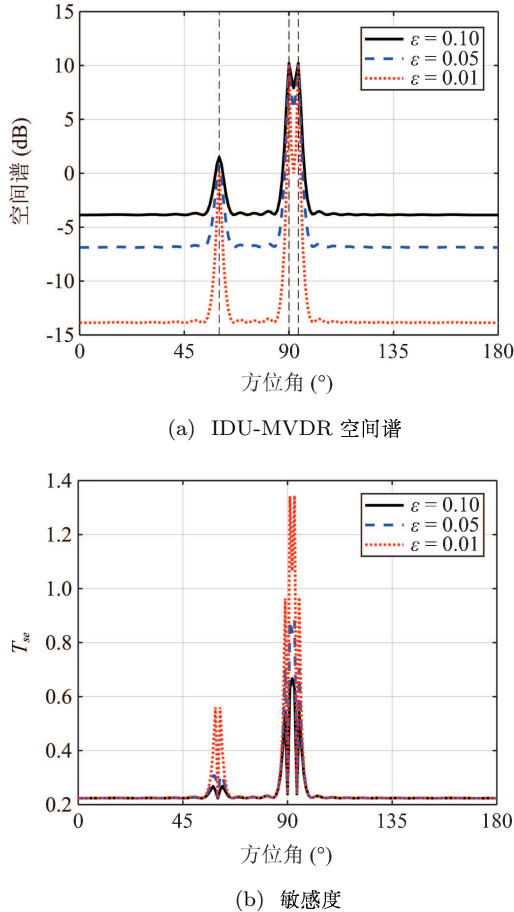


图 4 IDU-MVDR 空间谱和敏感度随  $\varepsilon$  变化图

根据以上分析, 实际应用中若对分辨力的要求较高, 且阵列流形误差较小, 应当选取较小的  $\varepsilon$  以获得好的多目标分辨性能; 否则应当选取较大的  $\varepsilon$ , 以确保稳健性。

### 3.2 采用采样协方差矩阵 IDU-MVDR 方法的性能

在实际应用中理论协方差矩阵是无法获得的, 常用式 (2) 所示的采样协方差矩阵代替。在这种情况下, 由于快拍数有限, 统计意义下各阵元上互不相关的噪声仍具有一定的相关性, 即噪声协方差矩阵不再是一个对角阵。

假设各阵元上的噪声为统计意义下互不相关的高斯白噪声, 则给定快拍数  $L$ , 阵元  $m_1$  和  $m_2$  ( $m_1 \neq m_2$ ) 上的噪声相关性为<sup>[23]</sup>:

$$\Gamma_{m_1 m_2} = \frac{E(|r_{nn, m_1 m_2}|^2)}{E(r_{nn, m_1 m_1})E(r_{nn, m_2 m_2})} = \frac{1}{L}, \quad (28)$$

式中,  $E(\cdot)$  表示期望,  $r_{nn, m_1 m_2}$  表示噪声协方差矩阵  $\mathbf{R}_{nn}$  中第  $m_1$  行第  $m_2$  列上的元素,  $E(r_{nn, m_1 m_1})$  和  $E(r_{nn, m_2 m_2})$  分别等于阵元  $m_1$  和  $m_2$  上的噪声功率  $\sigma_{n, m_1}^2$  和  $\sigma_{n, m_2}^2$ 。由式 (28) 可知, 快拍数越少, 两阵元上的噪声相关性越强, 噪声协方差矩阵中的非对角线元素也越大。

由第 2 节可知, IDU-MVDR 方法是在各阵元上的噪声完全不相关, 即噪声协方差矩阵是一个对角阵的前提下推导提出的。因此, 采用采样协方差矩阵代替理论协方差矩阵将导致一定的模型失配, 并影响 IDU-MVDR 方法的性能。

固定快拍数, 利用采样协方差矩阵重复图 2—图 4 中的仿真, 可得到类似的结果, 说明在采用采样协方差矩阵时 IDU-MVDR 仍可获得优于 CBF、MVDR 和 HDU-MVDR 的多目标分辨性能, 且  $\varepsilon$  对 HDU-MVDR 性能的影响规律不变。下文着重分析快拍数对 IDU-MVDR 方法性能的影响。

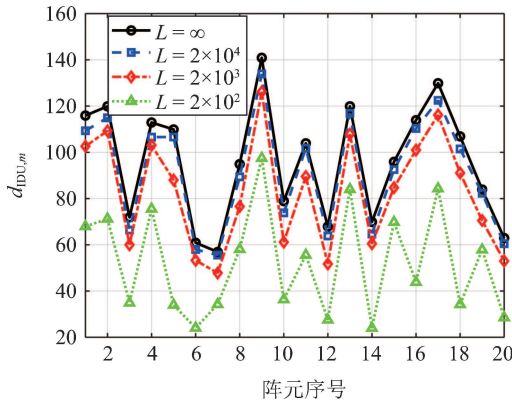
继续考虑 3.2 小节中的仿真算例。保持各项仿真参数不变, 分别使用  $2 \times 10^4$ 、 $2 \times 10^3$  和  $2 \times 10^2$  个快拍计算协方差矩阵  $\mathbf{R}$ 。取  $\varepsilon = 0.05$ , 对  $\mathbf{R}$  进行非均匀对角减载。快拍数  $L$  取不同值时各阵元上的减载量  $d_{\text{IDU}, m}$ 、剩余噪声功率  $\sigma_{n\text{-res-IDU}, m}^2$  和减载后协方差矩阵  $\mathbf{R}_{\text{IDU}}$  的特征值分布分别如图 5(a)、图 5(b) 和图 5(c) 所示。图中同样给出了  $L = \infty$ , 即理论协方差已知情况下的计算结果作为对比。

由图 5(a) 可以看出,  $L$  越小,  $d_{\text{IDU}, m}$  与理论计算结果的偏差越大。在图 5(b) 中, 减载后各阵元上的  $\sigma_{n\text{-res-IDU}, m}^2$  随着  $T$  减小而增加, 阵元间  $\sigma_{n\text{-res-IDU}, m}^2$  的一致性同时变差。图 5(c) 中,  $T$  取不同值时,  $\mathbf{R}_{\text{IDU}}$  的最小特征值均为 4.1。但是, 随着  $T$  减小, 噪声相关性增强, 减载后各阵元上的  $\sigma_{n\text{-res-IDU}, m}^2$  增加且一致性减弱, 导致  $\mathbf{R}_{\text{IDU}}$  的前  $M - K + 1$  个噪声特征值  $\gamma_{K+1}, \dots, \gamma_{M-1}$  增大, 噪声特征值分散程度  $\gamma_{K+1}/\gamma_M$  增强。

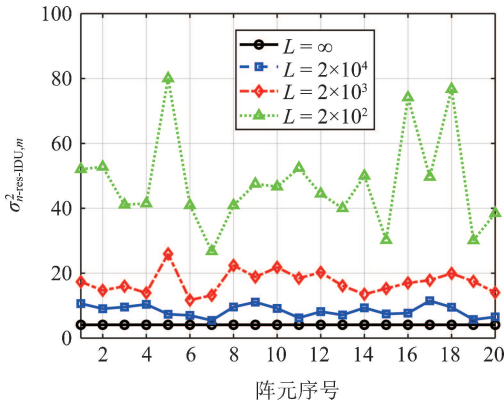
利用减载后的协方差矩阵  $\mathbf{R}_{\text{IDU}}$  进行多目标分辨, 图 6(a) 和图 6(b) 分别给出了  $L$  取  $2 \times 10^4$ 、 $2 \times 10^3$ 、 $2 \times 10^2$  时, IDU-MVDR 的空间谱和波束指向不同方向时的敏感度。

由图 6(a) 可以看出,  $L$  取  $2 \times 10^4$  和  $2 \times 10^3$  时来自  $90^\circ$  和  $94^\circ$  的目标均可被分辨, 但是  $L = 2 \times 10^4$  时两目标间的凹槽更深, 当  $L = 2 \times 10^2$  时两相近目标未被成功分辨。以上结果说明, 受剩余噪声功率增强、噪声特征值分散程度  $\gamma_{K+1}/\gamma_M$  增加的影响,

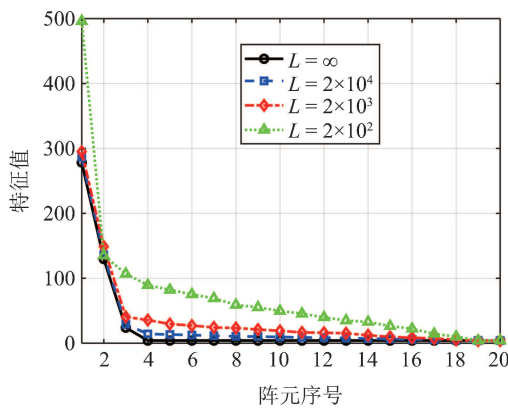
IDU-MVDR 的分辨力随着  $L$  的减小而减弱。另外，随着  $L$  减小，各阵元上的剩余噪声功率增加、阵元间的噪声相关性增强，IDU-MVDR 空间谱的背景级升高并且起伏增大。



(a) 减载量  $d_{IDU,m}$



(b) 剩余噪声功率  $\sigma^2_{n-res-IDU,m}$



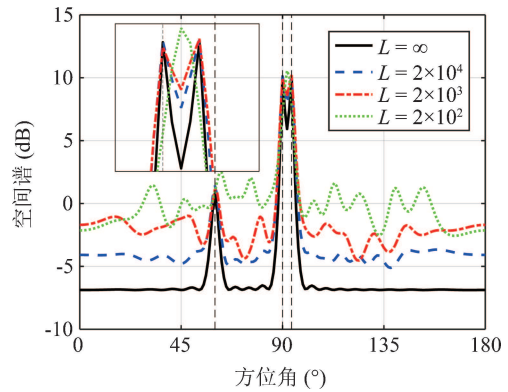
(c) 减载后协方差矩阵  $R_{IDU}$  的特征值分布

图 5 各阵元上非均匀减载量、剩余噪声功率和减载后协方差矩阵特征值分布随快拍数变化图

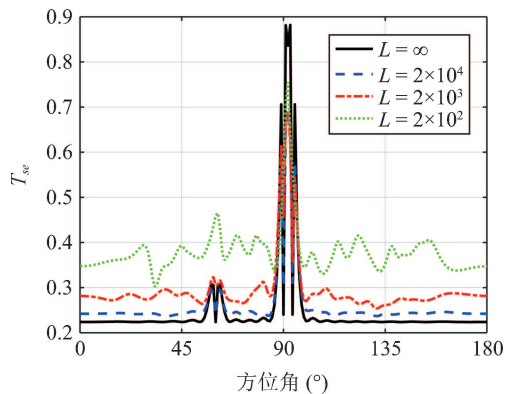
用采样协方差矩阵替代理论协方差矩阵， $L$  越小，噪声相关性越强，受其影响， $T_{se}$  也越大。如图 6(b)，随着  $L$  减小， $T_{se}$  整体增大，表明 IDU-MVDR 的稳健性变差，抵抗阵列流型误差的能力减弱。

根据以上结果，快拍数减少将导致 IDU-MVDR

的多目标分辨性能由于模型失配程度增强而下降。实际应用中，为达到预期效果所需要的最少快拍数与所需分辨的目标间隔、信噪比等因素有关。经验上，在本文讨论的低信噪比情况下，为保证 IDU-MVDR 的有效性应选择  $L \geq 30 M$ 。当然，在条件允许的情况下，应尽量增加采用快拍数以获得更好的多目标分辨结果。



(a) IDU-MVDR 空间谱



(b) 敏感度

图 6 IDU-MVDR 空间谱和敏感度随快拍数变化图

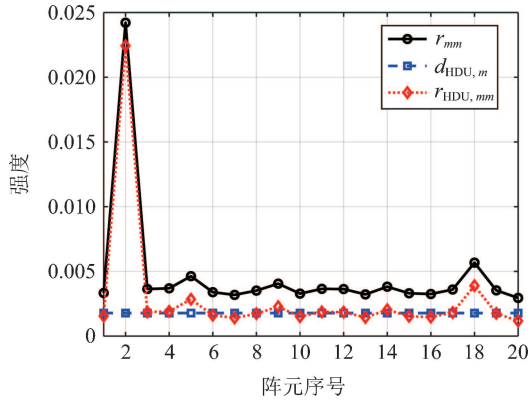
### 4 海上实验数据验证

本节利用海上实验数据验证 IDU-MVDR 方法的有效性。实验于 2014 年在我国南海某海域进行。实验中接收船搭载拖曳阵以大约 5 kn 的速度航行，无源接收信号。拖曳阵中任意相邻两阵元间间隔大约 1.5 m，各阵元上的数据采样频率均为 12 kHz。文中对拖曳阵中 20 个阵元上 840 s 的接收数据进行处理。处理频段选择信噪比较低，中心频率为 1000 Hz，带宽为 50 Hz 的窄带。因海水声速  $c \approx 1500$  m/s，处理频段内阵元间距约等于信号波长，即  $d \approx \lambda$ 。

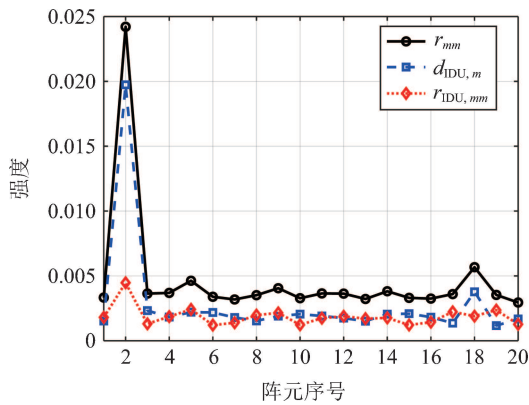
利用第 500 ~ 510 s 接收数据构造协方差矩阵  $R$ 。分别对  $R$  实施均匀和非均匀对角减载，并保持减载后协方差矩阵的最小特征值相等。非均匀对角减载中，取  $\epsilon = 0.01$ 。分别以  $r_{HDU,mm}$  和  $r_{IDU,mm}$  表



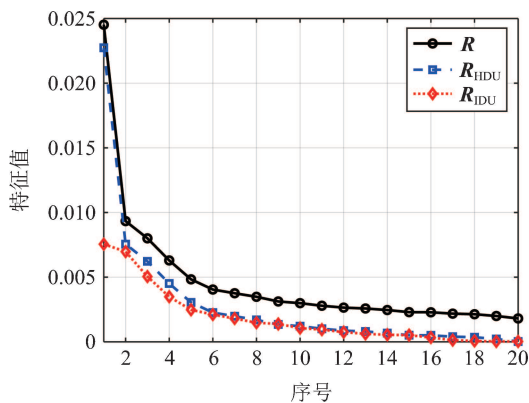
示均匀和非均匀对角减载后协方差矩阵的第  $m$  个对角线元素, 图 7(a) 和图 7(b) 分别给出了均匀和非均匀对角减载中各阵元上的减载量及减载前后协方差矩阵的主对角线元素, 图 7(c) 对比了减载前后协方差矩阵的特征值分布。



(a)  $r_{mm}$ 、 $d_{\text{HDU},m}$  和  $r_{\text{HDU},mm}$



(b)  $r_{mm}$ 、 $d_{\text{IDU},m}$  和  $r_{\text{IDU},mm}$



(c)  $R$ 、 $R_{\text{HDU}}$  和  $R_{\text{IDU}}$  的特征值

图 7 均匀和非均匀对角减载前后, 协方差矩阵对角线元素变化图和协方差矩阵特征值变化图

由图 7(a) 和图 7(b) 可以看出, 减载前第 2 个对角线元素明显较大, 除其之外各对角线元素大小较一致, 说明第 2 个阵元上的噪声明显较强, 其余阵元上的噪声功率相对一致。由于均匀对角减载中

各阵元上减载量相同, 减载后第 2 个阵元上的噪声没有得到有效的抑制。而非均匀对角减载在对第 2 个阵元进行了更大幅度的减载, 减载后该阵元上的噪声分量被有效移除, 各对角线元素起伏减弱。由图 7(c) 可以看出, 减载前  $R$  的噪声特征值较大, 减载后  $R_{\text{HDU}}$  和  $R_{\text{IDU}}$  的噪声特征值减小, 且最小特征值均为  $\gamma_{\min} = \varepsilon \min\{r_{mm}\} = 5.05 \times 10^{-5}$ 。但是, 由于非均匀对角减载移除了更多噪声分量,  $R_{\text{IDU}}$  相比  $R_{\text{HDU}}$  具有更小的特征值。以上结果表明, 非均匀对角减载较均匀对角减载更有效地消除了各阵元上的噪声。

图 8 给出了利用 500s ~ 510s 接收数据获得的 CBF、MVDR、HDU-MVDR 和 IDU-MVDR 归一化空间谱。由于处理频段下  $d > \lambda/2$ , 空间谱中将出现栅瓣, 且主瓣方位  $\theta_{\text{ML}}$  和栅瓣方位  $\theta_{\text{GL}}$  满足  $\cos \theta_{\text{GL}} = \cos \theta_{\text{ML}} \pm k(\lambda/d)$  ( $k=1, 2, \dots$ )。因此, 图 8 中  $79^\circ$  和  $144^\circ$  附近的谱峰实际上对应于同一目标, 其中一个为主瓣、另一个为栅瓣, 且  $144^\circ$  附近的谱峰因更靠近端射方向而展宽。 $89^\circ$  和  $172^\circ$  附近的谱峰也是如此。对比 4 种方法的空间谱可以看出, MVDR 与 CBF 的空间谱十分相似, 谱峰较宽、背景级较高, 说明各阵元上噪声较强, 导致 MVDR 性能损失严重。相比之下 HDU-MVDR 和 IDU-MVDR 具有更加尖锐的谱峰和更低的背景级, 显示出了更高的分辨力, 各谱峰也更加明显。相较于 HDU-MVDR, IDU-MVDR 通过非均匀对角减载消除了更多噪声分量, 因此其谱峰更尖锐、背景级更低。

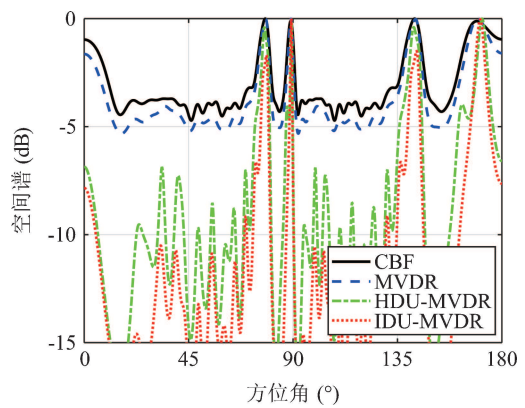


图 8 CBF、MVDR、HDU-MVDR 和 IDU-MVDR 归一化空间谱

使用 CBF、MVDR、HDU-MVDR 和 IDU-MVDR 对 840 s 整段接收数据进行处理, 可得到时间方位历程 (Bearing and Time Recordings, BTR) 图, 分别如图 9(a)、图 9(b)、图 9(c) 和图 9(d) 所示。其中, 每次使用 10 s 接收数据计算空间谱, 并对获得的空间谱进行独立的归一化处理。在 IDU-MVDR 方法中,

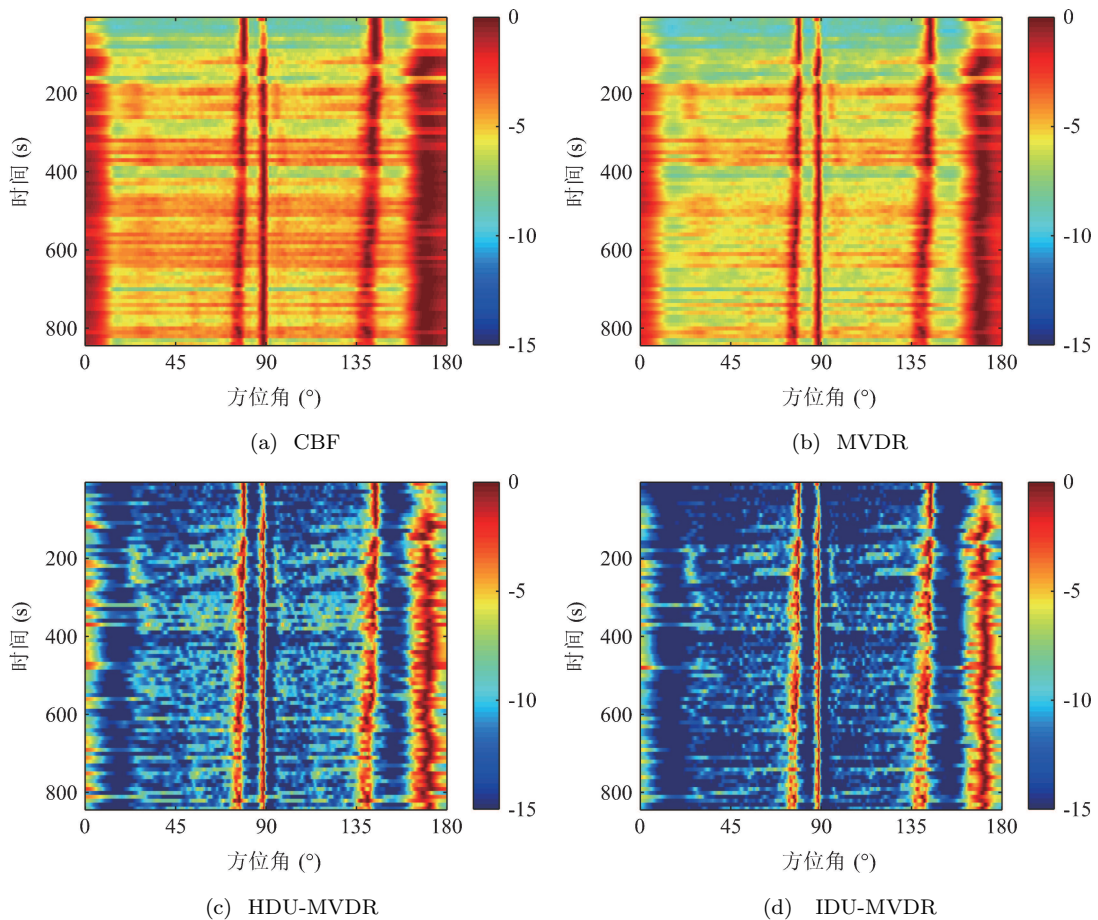


图9 CBF、MVDR、HDU-MVDR和IDU-MVDR的BTR图

取  $\varepsilon = 0.01$ 。

对比4幅BTR图可以看出，CBF和MVDR方法由于分辨力较低，其BTR图中目标航迹较宽，对于 $172^\circ$ 附近的航迹尤其明显。另外，由于各阵元上的噪声功率较强，CBF和MVDR的BTR图中的背景级较高。相比CBF和MVDR、HDU-MVDR和IDU-MVDR抑制了各阵元上的非相关噪声，具有更高的分辨力，因此其BTR图中背景级更低，目标航迹更窄，也更加明显。与HDU-MVDR相比，IDU-MVDR消除了更多的噪声分量，因此其BTR图中的背景级更低，目标航迹更窄。但是，IDU-MVDR对比UHD-MVDR的性能优势较小，这是因为除第2个阵元外其它阵元上的噪声功率一致性较好，IDU-MVDR的性能优势仅来源于更好地抑制了第2个阵元上的噪声。在各阵元上噪声功率起伏较大的情况下，IDU-MVDR相比HDU-MVDR将显示更大的性能优势。

## 5 结论

为消除水声阵列上的起伏非相关噪声，提高MVDR方法的多目标分辨性能，提出了一种非均匀

对角减载MVDR方法，即IDU-MVDR方法。该方法最大化减载量之和，同时约束减载后协方差矩阵的最小特征值是一个较小的正值，然后利用减载后的协方差矩阵实施MVDR方法。数值仿真表明，快拍较多时，IDU-MVDR方法可通过非均匀对角减载消除大部分非相关噪声，但减载后各阵元上仍保留小部分功率一致的噪声分量，因此其相比MVDR方法分辨力更高，空间谱中背景级更低、弱目标谱峰更加明显，并且具备一定的稳健性。减载后保留的噪声功率越小，IDU-MVDR方法的多目标分辨性能越好，但稳健性越差。文中给出参数 $\varepsilon$ 的经验取值范围为 $0.01 \sim 0.1$ ，实际应用中需综合考虑多目标分辨性能和稳健性的要求，选择合适的 $\varepsilon$ ，保留适当功率的噪声。此外，受模型失配的影响，IDU-MVDR方法的多目标分辨性能随快拍数的减少而下降，实际应用中应尽可能增加快拍数以获得更好的多目标分辨结果。最后，海上实验验证了IDU-MVDR方法的有效性。

未来的工作中，将针对如何更加合理地选择 $\varepsilon$ 在保证稳健性的前提下尽量提高多目标分辨性能，及快拍数对IDU-MVDR方法多目标分辨性能的影响，开展进一步的研究。

## 参 考 文 献

- 1 Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proc. IEEE*, 1969; **57**(8): 1408—1418
- 2 杨益新, 孙超, 马远良. 宽带低旁瓣时域波束形成. *声学学报*, 2003; **28**(4): 331—338
- 3 蒋飏, 朱堃, 孙长瑜. 阵列指向性二次型约束稳健波束形成算法. *声学学报*, 2006; **31**(1): 91—95
- 4 游鸿, 黄建国, 史文涛. 基于宽带分裂阵列的水下远程被动多目标检测与定向. *声学学报*, 2009; **34**(6): 527—532
- 5 闫超, 郭良浩, 汪福全, 葛凤翔. 一种鲁棒性的最小方差无失真响应波束形成算法及其应用. *声学学报*, 2011; **36**(6): 605—610
- 6 林鹏, 宫在晓, 郭永刚, 张仁和, 李风华. 拖线阵机动时的自适应波束形成. *声学学报*, 2013; **38**(3): 251—257
- 7 Lasky M, Doolittle R D, Simmons B D *et al.* Recent progress in towed hydrophone array research. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 2004; **29**(2): 374—387
- 8 马根卯, 时胜国, 于树华. 矢量拖曳线列阵流噪声时空相关性研究. *哈尔滨工程大学学报*, 2015; **36**(01): 57—61
- 9 周彬, 赵安邦, 龚强等. 基于对角减载的水声阵列 SMI-MVDR 空间谱估计技术. *系统工程与电子技术*, 2014; **36**(12): 2381—2387
- 10 赵安邦, 周彬, 宋雪晶等. 水声阵列信号处理对角减载技术. *哈尔滨工程大学学报*, 2014; **35**(11): 1327—1331
- 11 夏麾军, 马远良, 汪勇, 刘亚雄. 高增益对角减载波束形成方法研究. *声学学报*, 2016; **41**(4): 449—455
- 12 夏麾军, 马远良, 刘亚雄. 复杂噪声场下对角减载技术的原理及应用. *物理学报*, 2017; **66**(1): 152—161
- 13 Wright J, Ganesh A, Rao S *et al.* Robust principal component analysis: Exact recovery of corrupted low-rank matrices via convex optimization. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2009: 2080—2088
- 14 Candès E J, Li X, Ma Y *et al.* Robust principal component analysis. *J. Acn*, 2011; **58**(3): 1—37
- 15 Amailland S, Thomas J H, Pézerat C *et al.* Boundary layer noise subtraction in hydrodynamic tunnel using robust principal component analysis. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2018; **143**(4): 2152—2163
- 16 Hald J. Removal of incoherent noise from an averaged cross-spectral matrix. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2017; **142**(2): 846
- 17 Leclere Q, Totaro N, Pézerat C *et al.* Extraction of the acoustic part of a turbulent boundary layer from wall pressure and vibration measurements. *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, 2015; **251**(1): 816—824
- 18 Dougherty R P. Cross spectral matrix diagonal optimization. *Proc. 6th Berlin Beamforming Conference*, 2016
- 19 鄢社锋, 马远良著. 传感器阵列波束优化设计及应用. 北京: 科学出版社, 2009
- 20 Van Trees H L. Optimum array processing: Part IV of detection, estimation, and modulation theory. John Wiley & Sons, 2004
- 21 Tian Z, Bell K L, Van Trees H L. A recursive least squares implementation for LCMP beamforming under quadratic constraint. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2001; **49**(6): 1138—1145
- 22 Grant M, Boyd S, Ye Y. CVX: Matlab software for disciplined convex programming. 2008
- 23 Bendat J S, Piersol A G. Engineering applications of correlation and spectral analysis. New York, Wiley-Interscience, 1980