

模糊随机参数二维声场数值计算^{*}

陈 宁 于德介 吕 辉 夏百战

(湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室 长沙 410082)

2013 年 5 月 27 日收到

2013 年 12 月 12 日定稿

摘要 解决声场参数同时具有模糊性和随机性的问题, 实现模糊随机声场声压响应的预测, 引入了信息熵理论, 利用信息熵的等效转换, 将模糊随机声场转化为纯随机声场或者纯模糊声场进行求解, 推导了基于摄动法的二维随机声场和模糊声场的有限元计算公式。以模糊随机参数下的二维管道声场模型和某轿车二维声腔模型为例进行了数值计算, 所得结果与蒙特卡洛法 (Monte Carlo Method) 所预测声压变化范围基本一致, 同时, 转化为纯随机声场和纯模糊声场所求得声压响应变化范围也基本一致, 说明了本文方法计算结果的准确性。因此本文方法能很好地应用于模糊随机参数下二维声场的预测, 具有重要的工程应用价值。

PACS 数: 43.20, 43.50

Numerical analysis of the 2D acoustic field with fuzzy-random parameters

CHEN Ning YU Dejie LÜ Hui XIA Baizhan

(State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University Changsha 410082)

Received May 27, 2013

Revised Dec 12, 2013

Abstract Aim at the problem that the fuzziness and the randomness may exist in a acoustic field at the same time, a method for the numerical analysis of the 2D acoustic field with Fuzzy-Random parameters is proposed based on the equivalent conversion of information entropy. In the proposed method, a fuzzy-random acoustic field is treated as a pure fuzzy acoustic field or a pure random acoustic field by transforming all the variables into fuzzy variables or random variables. Perturbation finite element method for calculating the fuzzy two-dimension acoustic field and random two-dimension acoustic field are deduced. The sound pressure response of a 2D acoustic tube and a 2D car acoustic cavity with fuzzy-random parameters are analyzed by the proposed method and the Monte Carlo method. The analysis results of pure fuzzy acoustic field and that of pure random acoustic field are compared in the meantime, which verifies the validity of the proposed method. Thus, the proposed method can be well applied in analyzing the 2D acoustic field with fuzzy-random parameters, and has good prospect of engineering application.

引言

声学数值计算是噪声预测和控制的关键技术。随着计算机和计算技术的发展, 声学问题的计算方法已比较成熟。目前比较常用的声学数值计算方法主要包括有限元法 (Finite element method: FEM), 边界元法 (Boundary element method: BEM) 和无网

格法等^[1]。然而, 目前声学数值分析模型的参数大都按确定值来处理, 忽略了声场中各种不确定性因素的影响。如果将不确定性因素作为确定性信息来处理, 会得出不合理的结果, 因此在工程分析中应考虑不确定性因素的影响^[2]。

目前, 对不确定参数声学问题的研究相对较少, 主要采用区间方法或者概率方法处理。Xia 等采用区间参数描述声场的物理参数、载荷和边界条件的

* 湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室自主课题项目 (60870002) 资助

不确定性,研究了具有区间参数的声场数值分析问题^[3-5]。由于区间只是模糊参数的一个截集,因此属于模糊参数的范畴。James 和 Dowling 研究了量化声场不确定性参数的方法以及确定声压幅值和相位概率密度函数的方法^[6-8]。Finette 等人研究了不确定波导环境下基于随机基础扩张预测声传播的有效性^[9-11]。在采用随机模型分析具有不确定参数的声场时,需要预先知道参数的概率特征量。但在许多实际应用中,参数的真实概率分布往往难以得到。而影响参数概率分布的未知因素又通常无法用客观的方法去量化,它们只能通过工程师的实际经验和知识,用一种主观的不精确的方式表达出来,这种主观不精确性即为模糊性,此时声场为同时具有模糊性和随机性的模糊随机声场。对这种同时具有模糊性和随机性的模糊随机声场,目前尚未见研究。

模糊随机参数已广泛应用于不确定结构分析。文献 12 对模糊随机有限元平衡方程作 λ 水平截集,得到随机区间平衡方程,将此方程转化为两类普通随机平衡方程求解,利用小参数摄动理论推导出求解随机区间位移的递归方程组,但这种算法计算复杂,尚有待改进。文献 13 提出一种利用信息熵将模糊随机变量转变为随机变量的新方法,并用该方法研究了结构可靠性问题,所得计算结果与水平截集法所获得结果一致,验证了该方法的正确性;文献 14 将其推广到模糊随机结构的静力学分析,研究结果表明了该方法的有效性;文献 15 将该方法引入分析混凝土面板堆石坝分析,并与实测数据进行对比,结果表明该方法具有重要的工程应用价值。

为了解决模糊随机声场分析问题,实现同时具有模糊性和随机性声场声压响应的预测,本文引入信息熵理论,利用信息熵的等效转换将模糊随机声场转换为纯模糊声场或纯随机声场进行求解;推导了基于摄动法的模糊声场和随机声场的有限元计算公式;以二维管道和汽车声腔模型为数值算例,通过比较纯模糊声场和纯随机声场所得分析结果,验证了本文方法的正确性,说明本文提出的方法能有效预测模糊随机参数二维声场,具有良好的工程应用前景。

1 模糊随机变量的定义与转换

1.1 模糊随机变量的定义

Kwakernaak 引入的模糊随机变量的定义为^[12]:

设 (Ω, A, P) 为概率测度空间,模糊集值映射 $\tilde{X}: \Omega \rightarrow f(R) = \{\tilde{A} | \tilde{A}: \rightarrow [0, 1] \text{ 为分段连续函数}\}$, 称为模糊随机变量,简称 F 随机变量。如果

(1) $\forall \lambda \in (0, 1], \overline{X}_\lambda(w), \underline{X}_\lambda(w)$ 为 (Ω, A, P) 上的随机变量。

(2) $\forall \lambda \in (0, 1], \overline{X}_\lambda(w), \underline{X}_\lambda(w) \in X_\lambda(w)$, 其中:

$$\begin{aligned} \underline{X}_\lambda(w) &= \inf \left\{ x \in R \mid \tilde{X}(x, w) \geq \lambda \right\}, \\ \overline{X}_\lambda(w) &= \sup \left\{ x \in R \mid \tilde{X}(x, w) \geq \lambda \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

则 $X_\lambda(w)$ 为 \tilde{X} 的水平截集, $\tilde{X}(x, w)$ 为 \tilde{X} 的隶属函数。

由上述定义可知,若 \tilde{X} 是 Ω 上的模糊随机变量,则对 $\forall \lambda \in (0, 1], X_\lambda(w) = [\underline{X}_\lambda(w), \overline{X}_\lambda(w)]$ 不仅是一个闭区间数,而且是一个随机区间。与普通随机变量的数字特征相对应,模糊随机变量也可用其数字特征来描述,其数字特征仍为有界闭模糊数。

1.2 模糊随机变量的转换

参数的不确定性可用信息熵进行度量。不确定性越大,熵越大^[13]。

对于连续随机变量 X ,其概率熵定义如下:

$$H = - \int_x p(x) \ln p(x) dx, \quad (2)$$

式中 $p(x)$ 为 X 的概率密度函数。

对于模糊变量 Y ,其模糊熵可定义为:

$$G = - \int_y f'(y) \ln f'(y) dy, \quad (3)$$

$$f'(y) = \frac{f(y)}{\int_y f(y) dy}, \quad (4)$$

式中 $f(y)$ 为其隶属函数。

熵是对信息中参数不确定性的一种度量,从这一角度来看,概率熵和模糊熵无实质区别。它们分别是参数的两种不确定性(模糊性和随机性)的宏观统计的数学描述,两者在反映两种不确定性的强弱上的作用是相同的,并且模糊变量和随机变量可以通过熵相互转换。

对于任一模糊随机参数,可以将该参数的概率熵与模糊熵结合在一起作为该参数总的不确定性的测度。设 E 为总信息熵,又称为联合信息熵,定义如下:

$$E = H + G. \quad (5)$$

在保证总信息熵不变的前提下,可以将该变量转换为等效的纯模糊变量或者纯随机变量。转换的原则是转换后变量的总信息熵等于原变量的总信息熵。

由于声场受外界环境、制造公差以及不可预测因素的影响,声速、密度、载荷、阻尼等声场参数可

能是不确定的。正态分布是工程中常见的随机变量分布形式, 因此本文将讨论将不确定变量转换为等效的正态随机变量。但理论上是可以将不确定变量转变为任意我们所期望的分布。

由式 (2) 可得正态型随机变量的概率熵为:

$$H_{\text{eq}} = \ln(\sqrt{2\pi e\sigma}). \quad (6)$$

将不确定变量的联合信息熵 $E = H_{\text{eq}}$ 代入上式, 可以得到等效正态随机变量的标准差 σ 为:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{E-0.5}. \quad (7)$$

等效正态随机变量的均值等于隶属度函数为 1 时模糊变量的值。

同理, 将不确定变量转换为等效的模糊变量时, 首先将非正态分布转化成正态分布, 然后利用熵不变的原则转化成对称型模糊数或者非对称型模糊数。本文讨论将不确定变量转化成三角型模糊数 $\tilde{I} = (m, \alpha, \beta)_{\text{LR}}$, 其左右基准函数为:

$$L(x) = \begin{cases} \frac{x-m}{\alpha} + 1, & m-\alpha < x \leq m, \\ 0, & x \leq m-\alpha, \end{cases} \quad (8)$$

$$R(x) = \begin{cases} \frac{m-x}{\beta} + 1, & m \leq x < m+\beta, \\ 0, & x \geq m+\beta, \end{cases}$$

基准函数 L 和 R 分别为 \tilde{I} 的左右分支, m 是 \tilde{I} 的主值, α 和 β 分别称为 \tilde{I} 的左右展形。

将式 (8) 代入式 (3) 可得三角型模糊变量的模糊熵为:

$$G_{\text{eq}} = 0.5 - \ln \frac{2}{\alpha + \beta}. \quad (9)$$

将不确定变量的联合信息熵 $E = G_{\text{eq}}$ 代入上式, 可以得到等效三角型模糊变量的左右展形之和, 其主值为随机变量的均值。

2 二维声场有限元模型

结构振动在理想声场介质中引起的小振幅简谐声波、声压满足 Helmholtz 波动方程:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \quad (10)$$

式中 p 为声压, $k = \omega/c$ 为波数, ω 为圆频率, c 为声速, $\nabla = (\partial/\partial x)i + (\partial/\partial y)j + (\partial/\partial z)k$ 为微分算子。

声压与简谐声波的振动速度关系为:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} + j\rho\omega v_n = 0, \quad (11)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$ 为虚数, v_n 为质点振动速度, ρ 为介质的密度, p 为声压, \mathbf{n} 表示声腔边界表面法线方向。

二维封闭声腔的边界条件包括 Dirichlet 边界条件、Neumann 边界条件和 Robin 边界条件, 具体表达形式如下:

Dirichlet 边界条件, 即声压边界条件:

$$p = p_D, \quad (12)$$

式中, p_D 表示边界处声压。

Neumann 边界条件, 即速度边界条件:

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = -j\rho\omega v_n. \quad (13)$$

Robin 边界条件, 即声阻抗边界条件:

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = -j\rho\omega A_n p, \quad (14)$$

式中, A_n 表示声导纳系数。

根据伽辽金原理, 声场问题的弱形式可以写成如下形式:

$$-\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla p d\Omega + k^2 \int_{\Omega} w \cdot p d\Omega - j\rho\omega \int_{\Gamma_n} w \cdot v_n d\Gamma_n - j\rho\omega A_n \int_{\Gamma_x} w \cdot p d\Gamma_x = 0, \quad (15)$$

式中, w 为试函数。

对于有限元模型而言, 节点声压值近似写成:

$$p = \sum_{I=1}^{NP} N_I p_I = \mathbf{N} \mathbf{p}, \quad (16)$$

式中 N_I 为有限元等参单元形函数, 其中 I 为节点编号 $I = 1, 2, 3, \dots, NP$, \mathbf{N} 为单元各节点形函数的组合矩阵; p_I 为节点 I 的声压值, \mathbf{p} 为单元的节点声压向量; NP 为单元节点个数。对于四边形单元可以写成:

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4], \quad (17)$$

其中:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\varepsilon)(1-\eta), \dots, N_2 = \frac{1}{4}(1+\varepsilon)(1-\eta),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\varepsilon)(1+\eta), \dots, N_4 = \frac{1}{4}(1-\varepsilon)(1+\eta). \quad (18)$$

将式 (16) 和式 (17) 代入式 (15) 中, 得到离散声域的系统方程:

$$(\mathbf{K} - k^2 \mathbf{M} + jk\mathbf{C}) \mathbf{P} = \mathbf{F}, \quad (19)$$

式中 \mathbf{K} 为刚度矩阵:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N})^T (\nabla \mathbf{N}) d\Omega, \quad (20)$$

\mathbf{M} 为声学质量矩阵:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad (21)$$

C 为声学阻尼矩阵:

$$C = \rho c A_n \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad (22)$$

F 为声压载荷向量:

$$F = -j\rho\omega \int_{\Gamma_n} \mathbf{N}^T v_n d\Omega. \quad (23)$$

3 模糊随机二维声场有限元分析

3.1 模糊参数二维声场有限元分析

假设二维声场模型中的声速、密度、声压载荷等为论域 U 上的模糊数 \tilde{a}_i

$$\begin{aligned} a \in \tilde{a} &= a^0 + \tilde{\beta} = (\tilde{a}_i), \\ a_i \in \tilde{a}_i &= a_i^0 + \tilde{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (24)$$

式中, a^0 是模糊数 \tilde{a} 的主值, $\tilde{\beta}$ 是模糊数 \tilde{a} 的摄动量, a_i^0 是模糊数 \tilde{a}_i 的主值, $\tilde{\beta}_i$ 是模糊数 \tilde{a}_i 的摄动量, n 是模糊参数的个数.

为了简化分析模糊参数不确定声场的分析过程, 将声学 FEM 方程 (19) 写成:

$$\mathbf{Z}(a)\mathbf{p}(a) = \mathbf{F}(a), \quad (25)$$

式中, $\mathbf{Z}(a)$ 和 $\mathbf{F}(a)$ 分别为模糊动刚度矩阵和模糊载荷向量. $\mathbf{Z}(a)$ 可以表示为:

$$\mathbf{Z}(a) = \mathbf{K}(a) - k(a)^2 \mathbf{M}(a) + jk(a)\mathbf{C}(a), \quad (26)$$

式中, $\mathbf{K}(a)$, $\mathbf{M}(a)$ 和 $\mathbf{C}(a)$ 分别为模糊刚度矩阵、模糊质量矩阵和模糊阻尼矩阵.

模糊数 \tilde{a} 可以看成由无数个 α 截集的区间 \tilde{a}_α 组成^[16], $\alpha \in [0, 1]$. 因此, 在各个隶属度 α 下通过求解方程 (25) 可得到各隶属度的声压向量响应区间 $\tilde{\mathbf{p}}_\alpha$, $\tilde{\mathbf{p}}_\alpha$ 可以写成:

$$\tilde{\mathbf{p}}_\alpha = [\underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}], \quad (27)$$

其中:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{p}} &= \min_{a \in \tilde{a}_\alpha} \{ \mathbf{Z}(a)^{-1} \mathbf{F}(a) \}, \\ \overline{\mathbf{p}} &= \max_{a \in \tilde{a}_\alpha} \{ \mathbf{Z}(a)^{-1} \mathbf{F}(a) \}, \end{aligned} \quad (28)$$

同时在各隶属度 α 下, 各模糊变量的截集区间 $\tilde{a}_{\alpha i}$ 可以写成:

$$\tilde{a}_{\alpha i} = [\underline{a}_{\alpha i}, \overline{a}_{\alpha i}] = a_{\alpha i}^m + \Delta a_{\alpha i}^I, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} a_{\alpha i}^m &= \frac{\overline{a}_{\alpha i} + \underline{a}_{\alpha i}}{2}, \\ \Delta a_{\alpha i}^I &= [-\Delta a_{\alpha i}, \Delta a_{\alpha i}], \\ \Delta a_{\alpha i} &= \frac{\overline{a}_{\alpha i} - \underline{a}_{\alpha i}}{2}, \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\overline{a}_{\alpha i}$, $\underline{a}_{\alpha i}$ 和 $a_{\alpha i}^m$ 分别表示截集区间 $\tilde{a}_{\alpha i}$ 的上下界和均值.

对动刚度矩阵 $\mathbf{Z}(\tilde{a}_\alpha)$ 和载荷矩阵 $\mathbf{F}(\tilde{a}_\alpha)$ 进行一阶泰勒展开有:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\tilde{a}_\alpha) &= \mathbf{Z}(a_{\alpha i}^m) + \sum_{i=1}^n \Delta a_{\alpha i} \frac{\partial \mathbf{Z}(a_{\alpha i}^m)}{\partial a_i} = \mathbf{Z}^m + \Delta \mathbf{Z}^I, \\ \mathbf{F}(\tilde{a}_\alpha) &= \mathbf{F}(a_{\alpha i}^m) + \sum_{i=1}^n \Delta a_{\alpha i} \frac{\partial \mathbf{F}(a_{\alpha i}^m)}{\partial a_i} = \mathbf{F}^m + \Delta \mathbf{F}^I, \end{aligned} \quad (31)$$

式中 \mathbf{Z}^m 和 \mathbf{F}^m 分别为声学动刚度矩阵 $\mathbf{Z}(\tilde{a}_\alpha)$ 和载荷矩阵 $\mathbf{F}(\tilde{a}_\alpha)$ 的均值, $\Delta \mathbf{Z}^I$ 和 $\Delta \mathbf{F}^I$ 分别为声学动刚度矩阵 $\mathbf{Z}(\tilde{a}_\alpha)$ 和载荷矩阵 $\mathbf{F}(\tilde{a}_\alpha)$ 的偏差区间.

将上式代入方程 (25), 可以得到:

$$\tilde{\mathbf{p}}_\alpha = \tilde{\mathbf{p}}^m + \Delta \tilde{\mathbf{p}}^I = (\mathbf{Z}^m + \Delta \mathbf{Z}^I)^{-1} (\mathbf{F}^m + \Delta \mathbf{F}^I), \quad (32)$$

其中 $\tilde{\mathbf{p}}^m$ 和 $\Delta \tilde{\mathbf{p}}^I$ 分别为隶属度 α 下截集区间 $\tilde{\mathbf{p}}_\alpha$ 的均值和偏差区间.

对 $(\mathbf{Z}^m + \Delta \mathbf{Z}^I)^{-1}$ 按 Neumann 级数进行展开^[2], 有:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}^m + \Delta \mathbf{Z}^I)^{-1} &= \\ (\mathbf{Z}^m)^{-1} + \sum_{r=1}^{\infty} (\mathbf{Z}^m)^{-1} (-\Delta \mathbf{Z}^I (\mathbf{Z}^m)^{-1})^r, \end{aligned} \quad (33)$$

将其代入式 (32) 可以得到:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_\alpha &= \tilde{\mathbf{p}}^m + \Delta \tilde{\mathbf{p}}^I = (\mathbf{Z}^m)^{-1} \mathbf{F}^m + (\mathbf{Z}^m)^{-1} \Delta \mathbf{F}^I + \\ &(\mathbf{Z}^m)^{-1} (-\Delta \mathbf{Z}^I (\mathbf{Z}^m)^{-1}) \mathbf{F}^m + \\ &\sum_{r=2}^{\infty} (\mathbf{Z}^m)^{-1} (-\Delta \mathbf{Z}^I (\mathbf{Z}^m)^{-1})^r \mathbf{F}^m + \\ &\sum_{r=1}^{\infty} (\mathbf{Z}^m)^{-1} (-\Delta \mathbf{Z}^I (\mathbf{Z}^m)^{-1})^r \Delta \mathbf{F}^I, \end{aligned} \quad (34)$$

不考虑高阶项, 上式可以写成:

$$\tilde{\mathbf{p}}_\alpha = \tilde{\mathbf{p}}^m + \Delta \tilde{\mathbf{p}}^I, \quad (35)$$

式中:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}^m &= (\mathbf{Z}^m)^{-1} \mathbf{F}^m, \\ \Delta \tilde{\mathbf{p}}^I &= (\mathbf{Z}^m)^{-1} \Delta \mathbf{F}^I - (\mathbf{Z}^m)^{-1} \Delta \mathbf{Z}^I \tilde{\mathbf{p}}^m = \\ &(\mathbf{Z}^m)^{-1} \sum_{i=1}^n \Delta a_i^I \frac{\partial \mathbf{F}(a_i^m)}{\partial a_i} - \\ &(\mathbf{Z}^m)^{-1} \sum_{i=1}^n \Delta a_i^I \frac{\partial \mathbf{Z}(a_i^m)}{\partial a_i} \tilde{\mathbf{p}}^m, \end{aligned} \quad (36)$$

最终, 模糊声压解集可以写成:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} (\alpha \cap \tilde{\mathbf{p}}_\alpha). \quad (37)$$

综合上述分析, 模糊参数二维声场分析步骤如下:

(1) 对模糊数 \tilde{a}_i 取 α 截集 ($i = 1, 2, \dots, n$), 得到 α 截集上 \tilde{a}_i 的区间表示 $[\underline{a}_{\alpha i}, \bar{a}_{\alpha i}]$;

(2) 在 α 截集上采用摄动有限元法求解, 从式 (32) 得到 α 截集上的声压响应区间;

(3) 对于其它 α 截集, 重复步骤 (2);

(4) 对各 α 截集上的声压响应区间按式 (37) 进行组装, 最终得到模糊参数声场的声压解集。

3.2 随机参数二维声场有限元分析

考虑声场随机参数为向量 \mathbf{b}^R ($r = 1, 2, \dots, m$), \mathbf{b}^R 的均值和方差表示为:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{b}^R) &= E(b_1^R, b_2^R, \dots, b_m^R), \\ \text{Var}(\mathbf{b}^R) &= \text{Var}(b_1^R, b_2^R, \dots, b_m^R). \end{aligned} \quad (38)$$

对声场的动刚度矩阵和载荷矩阵在随机参数均值处进行一阶泰勒展开有:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\mathbf{b}^R) &= \mathbf{Z}(E(\mathbf{b}^R)) + \\ &\sum_{r=1}^m \frac{\partial \mathbf{Z}(E(\mathbf{b}^R))}{\partial b_r^R} (b_r^R - E(b_r^R)) = \mathbf{Z}_0 + \Delta \mathbf{Z}^R, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{b}^R) &= \mathbf{F}(E(\mathbf{b}^R)) + \\ &\sum_{r=1}^m \frac{\partial \mathbf{F}(E(\mathbf{b}^R))}{\partial b_r^R} (b_r^R - E(b_r^R)) = \mathbf{F}_0 + \Delta \mathbf{F}^R. \end{aligned}$$

不考虑高阶项, 由摄动法可以得到随机参数声场声压响应 $\mathbf{p}(\mathbf{b}^R)$ 如下:

$$\mathbf{p}(\mathbf{b}^R) = (\mathbf{Z}_0)^{-1} \mathbf{F}_0 + (\mathbf{Z}_0)^{-1} (\Delta \mathbf{F}^R - \Delta \mathbf{Z}^R (\mathbf{Z}_0)^{-1} \mathbf{F}_0). \quad (40)$$

对上式两边同时取均值和方差, 可以得到随机参数声场声压响应 $\mathbf{p}(\mathbf{b}^R)$ 的均值 $E(\mathbf{p}(\mathbf{b}^R))$ 和方差 $\text{Var}(\mathbf{p}(\mathbf{b}^R))$ 为:

$$E(\mathbf{p}(\mathbf{b}^R)) = (\mathbf{Z}_0)^{-1} \mathbf{F}_0, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{p}(\mathbf{b}^R)) &= \sum_{r=1}^m \left((\mathbf{Z}_0)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}(E(\mathbf{b}^R))}{\partial b_r^R} \right)^2 \text{Var}(b_r^R) + \sum_{r=1}^m \left((\mathbf{Z}_0)^{-1} \frac{\partial \mathbf{Z}(E(\mathbf{b}^R))}{\partial b_r^R} (\mathbf{Z}_0)^{-1} \mathbf{F}_0 \right)^2 \text{Var}(b_r^R) + \\ &\sum_{r=1}^m \sum_{\substack{\xi=1 \\ \xi \neq r}}^m \left((\mathbf{Z}_0)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}(E(\mathbf{b}^R))}{\partial b_r^R} (\mathbf{Z}_0)^{-2} \frac{\partial \mathbf{Z}(E(\mathbf{b}^R))}{\partial b_r^R} \mathbf{F}_0 \right) \text{cov}(b_r^R, b_\xi^R), \end{aligned} \quad (42)$$

$\text{cov}(b_r^R, b_\xi^R)$ 是随机参数的协方差, 当随机参数之间相互独立时其值为零^[17]。

3.3 模糊随机参数二维声场有限元分析

当二维声场模型中的参数为模糊随机变量时, 首先利用信息熵的等效转换将模糊随机变量转化为模糊变量或者随机变量, 将模糊随机声场转化为纯模糊声场或者纯随机声场, 然后利用前两小节所推导的模糊声场有限元或者随机声场有限元进行分析。当转化为纯模糊声场时, 所求得模糊解集能直观的看出在不同隶属度下声压响应的截集区间变化范围; 当转化为纯随机声场时, 所求得的结果是声压响应的均值和均方差, 根据置信区间理论也能估计声压响应的变化范围。

4 数值算例

4.1 管道声场分析

管道声场模型如图 1 所示。管长 1 m、宽 0.1 m, 内部由空气流体填充。考虑到环境温度的不确定性, 假定环境温度均值为 15°C, 在 0°C 至 30°C 之间变化。由于空气密度以及声速均随环境温度变化, 因此假设空气密度及声速为三角型模糊数, 相应的空气密

度 ρ 为 $\tilde{\rho} = (1.225, 0.068, 0.061)_{\text{LR}} (\text{kg}/\text{m}^3)$, 流体中的声速 c 为 $\tilde{c} = (340.5, 8.7, 9)_{\text{LR}} (\text{m}/\text{s})$ 。考虑外部载荷对边界条件造成的不确定影响, 假设管道左端施加的法向速度边界条件 v_n 为模糊随机变量, 服从变异系数为 0.01 的正态分布, 其均值为三角型模糊数 $\tilde{v}_n = (5, 0.2, 0.2)_{\text{LR}} (\text{m}/\text{s})$; 管道其它边界为刚性壁。A 和 B 两点为管道声场中轴线上的两点, 坐标分别为 (0.275, 0) 和 (0.775, 0)。管道划分为 160 个单元, 205 个节点。

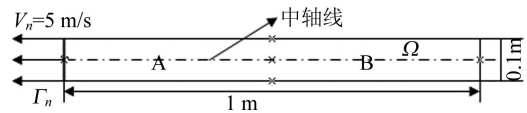


图 1 管道声场模型

利用信息熵的等效转换将模糊随机变量 v_n 转换为纯模糊变量 $\tilde{v}_n = (5, 0.0413, 0.0413)_{\text{LR}} (\text{m}/\text{s})$ 。在 $\lambda \in [0, 1]$ 上每隔 0.1 取一截集计算得到其隶属度下的声压响应区间, 最终得到模糊声压解集, 实现混合不确定参数声场的预测。

通过信息熵将模糊随机声场等效转化为纯模糊参数声场后, 由声场模糊有限元法 (Fuzzy Finite Element Method, FFEM) 求得的 A 和 B 两点在频率 300 Hz 处的声压虚部解集如图 2 中 (a) 和 (b) 所示,

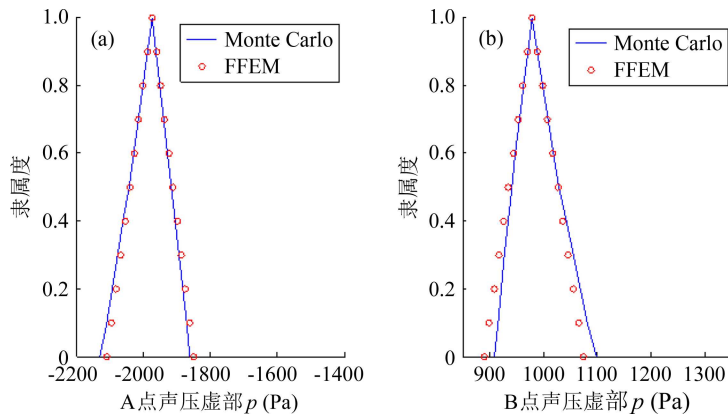


图 2 $f = 300 \text{ Hz}$ 时纯模糊声场 A 和 B 点的声压响应虚部解集

为了验证分析结果的正确性，以蒙特卡洛法迭代 10000 次得到的解为参考解。图 2 中同时给出用蒙特卡洛法迭代 10000 次得到的参考解。从图中可以看出，FFEM 求得的声压响应解集与参考解基本一致，且当隶属度 $\lambda \in [0.5, 1]$ 时，模糊解与参考解非常吻合。

图 3 和图 4 分别给出了 $f = 300 \text{ Hz}$ 时，管道轴线上各节点通过 FFEM 求得的声压虚部分布和采用蒙特卡洛方法迭代 10000 次得到的声压虚部分布。对比两图可以看出，模糊解集与蒙特卡洛法求得的参考解基本一致，进一步验证了分析结果的正确性。

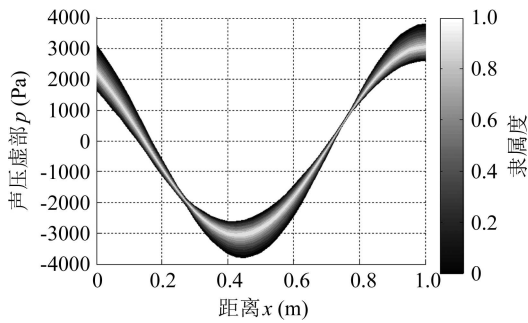


图 3 $f = 300 \text{ Hz}$ 时采用 FFEM 得到的纯模糊声场管道轴线的声压虚部分布图

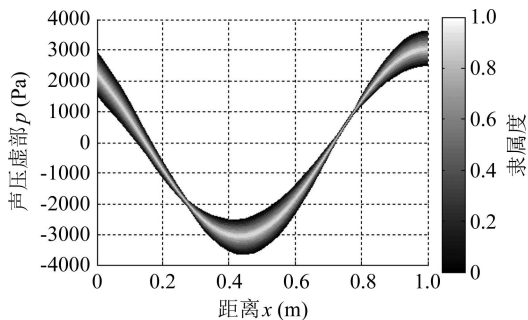


图 4 $f = 300 \text{ Hz}$ 时采用蒙特卡洛方法得到的纯模糊声场管道轴线的声压虚部分布图

作为比较，再利用信息熵的等效转换将模糊随机变量 v_n 以及模糊变量 ρ, c 都转换为呈正态分布的

随机变量，如表 1 所示。然后采用本文推导的声场摄动随机有限元对其进行求解，得到声场响应的均值 $E(p)$ 和均方差 σ 。

表 1 管道声场等效转换成纯随机声场后各参数值

参数	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$c \text{ (m/s)}$	$v_n \text{ (m/s)}$
均值	1.225	340.5	5.0
变异系数	0.0210	0.0104	0.0033

在 $f = 300 \text{ Hz}$ 处计算了管道轴线上各节点的声压虚部响应。基于置信区间理论，对转化为纯随机声场后的管道轴线上各节点利用 $E(p) \pm 3\sigma$ 估计声压虚部响应的变化范围，结果如图 5 所示。由于 $\lambda = 0$ 时的截集区间是模糊数的最大值和最小值构成的区间，为了比较纯随机声场与纯模糊声场所求得响应变化范围的一致性，图 5 中同时给出了转化为纯模糊声场后管道轴线上各节点声压虚部响应在隶属度 $\lambda = 0$ 时的截集区间。从图中可以看出，纯随机声场与纯模糊声场所求得的声压虚部响应变化范围比较接近，验证了摄动随机有限元在计算纯随机声场时的有效性，同时说明了模糊随机声场不管转化为纯模糊声场还是纯随机声场所预测的声压响应变化范围是一致的，这也验证了本文所提出的通过信息熵等效转换求解混合不确定声场方法的正确性。

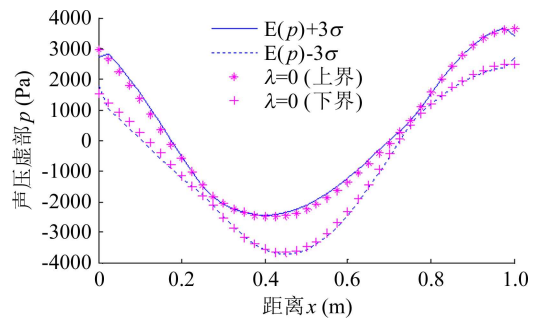


图 5 $f = 300 \text{ Hz}$ 时纯随机声场与纯模糊声场管道轴线声压虚部分布变化范围对比

4.2 轿车车内声场分析

汽车声腔内声音是重要的汽车噪声来源。声学数值分析能为预测和优化汽车 NVH 性能提供重要依据。图 6 所示为某轿车声腔二维模型，座椅简化为内部的一个空腔。边界条件为在声腔靠近发动机边界上有法向振动速度 v_n ，假设 v_n 是正态分布的随机变量，其均值为 0.01 m/s，变异系数为 0.01；由于制造公差等其它不可预测因素，假设吸声材料的声阻抗为模糊随机变量，其均值为三角型模糊数 $\tilde{A}_n = (0.00144, 0.00003, 0.00003)_{LR}$ (m/s)，服从变异系数为 0.01 的正态分布。有限元模型由 806 个节点，710 个单元组成，单元长度 $h = 0.05$ m。

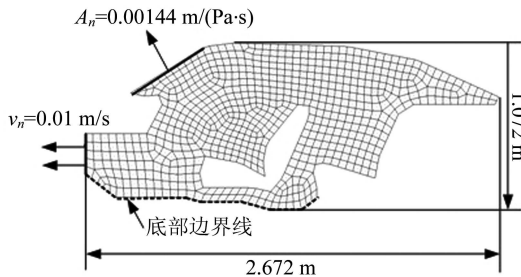


图 6 轿车声腔二维模型

考虑到外部环境因素以及制造误差因素的影响，假设空气密度和声速为三角型模糊数。空气密度 ρ 为 $\tilde{\rho} = (1.225, 0.025, 0.025)_{LR}$ (kg/m^3)；声波在流体中声速 c 为 $\tilde{c} = (340.5, 6.8, 6.8)_{LR}$ (m/s)。

将同时含有模糊性和随机性轿车声腔二维模型转化为纯模糊声场之后，轿车声腔底部边界在频率为 200 Hz 处用 FFEM 求得的声压实部与虚部分布

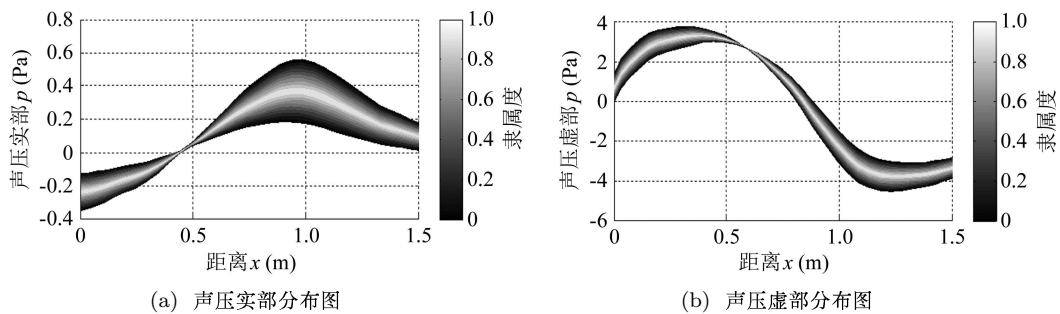


图 7 $f = 200$ Hz 时用 FFEM 求得的纯模糊声场轿车声腔底部边界声压实部和虚部分布图

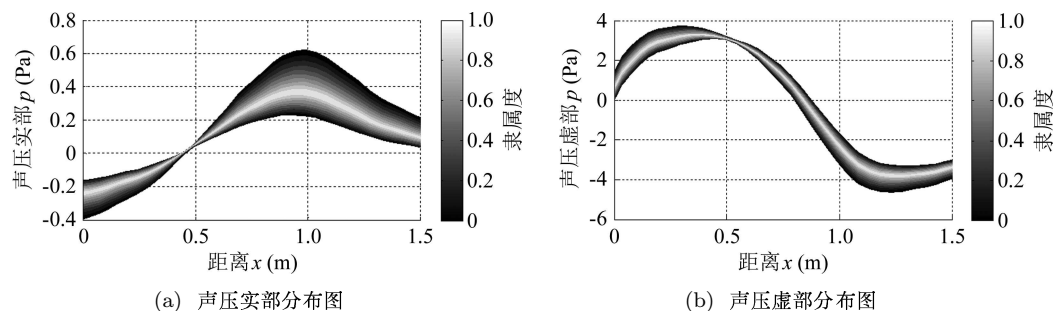


图 8 $f = 200$ Hz 时采用蒙特卡洛方法得到的纯模糊声场轿车声腔底部边界声压实部和虚部分布图

如图 7 所示。采用蒙特卡洛方法迭代 10000 次得到的轿车声腔底部边界在频率为 200 Hz 处的声压实部与虚部分布如图 8 所示。以蒙特卡洛方法得到的结果作为参考，对比图 7 和图 8 可以发现，两种方法求得的解集基本一致，验证了所得结果的正确性。

作为比较，利用信息熵的等效转换将同时含有模糊参数和随机参数的轿车声腔二维模型转化为纯随机声场，即将模糊随机变量 A_n 以及模糊变量 ρ, c 都转换为呈正态分布的随机变量，如表 2 所示。然后采用本文推导的声场摄动随机有限元对其进行求解，得到声场响应的均值 $E(p)$ 和均方差 σ 。

表 2 轿车声腔二维模型等效转换成纯随机声场后各参数值

参数	ρ (kg/m^3)	c (m/s)	A_n (m/s)
均值	1.225	340.5	0.00144
变异系数	0.0082	0.0080	0.0000005

在 $f = 200$ Hz 处计算了轿车声腔底部边界各节点的声压实部和虚部响应。基于置信区间理论，对转化为纯随机声场后的轿车声腔底部边界各节点利用 $E(p) \pm 3\sigma$ 估计声压实部和虚部响应的变化范围，结果如图 9 所示。作为对比，图 9 中同时给出了转化为纯模糊声场后轿车声腔底部边界各节点的声压实部和虚部响应在隶属度 $\lambda = 0$ 时的截集区间。从图中可以看出，纯随机声场与纯模糊声场所求得的声压实部和虚部响应分布均比较接近，进一步验证了本文所提出的通过信息熵等效转换求解混合不确定声场方法的正确性。

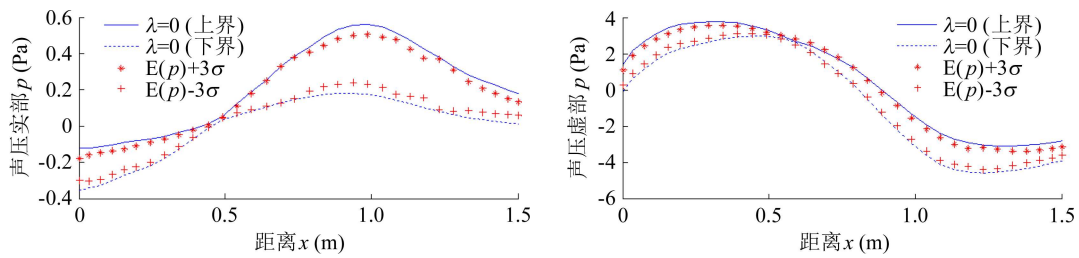


图 9 $f = 200$ Hz 时纯随机声场与纯模糊声场轿车声腔底部边界各节点声压分布变化范围对比

5 结论

本文考虑二维声场同时具有模糊性和随机性, 利用信息熵的等效转换, 将声场的随机性和模糊性统一为声场的随机性或者模糊性, 将模糊随机声场转化为纯随机声场或者纯模糊声场进行数值计算。以模糊随机参数下的二维管道声场模型和某轿车二维声腔模型为例进行数值计算, 研究结果表明:

(1) 本文提出方法具有一般性, 能解决同时具有模糊性和随机性的混合不确定二维声场问题, 模糊声场模型和随机声场模型都属于这一问题的特例;

(2) 与蒙特卡洛法成千上万次迭代计算相比, 本文方法只需进行一次有限元矩阵计算即可得到声压响应的变化范围, 计算效率大为提高;

(3) 通过对比转化为纯模糊声场所得结果和转化为纯随机声场所得结果, 验证了转化为纯随机声场和纯模糊声场所求得响应变化范围的一致性, 同时也说明了模糊随机二维声场声压响应计算结果的正确性, 表明本文方法能有效计算模糊随机参数下的二维声场, 具有重要的工程应用价值。

参 考 文 献

- 李义丰, 李国峰, 王云. 卷积完全匹配层在二维声波有限元计算中的应用. *声学学报*, 2010; **35**(3): 601—607
- 程广利, 张明敏. 浅海不确定声场的随机多项式展开法研究. *声学学报*, 2013; **38**(3): 294—299
- Xia Baizhan, Yu Dejie. Modified sub-interval perturbation finite element method for 2D acoustic field prediction with large uncertain-but-bounded parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 2012; **331**: 3774—3790
- Xia Baizhan, Yu Dejie. Interval analysis of acoustic field with uncertain-but-bounded parameters. *Computers & Structures*, 2012; **112–113**: 235—244
- Xia Baizhan, Yu Dejie, Liu Jian. Hybrid uncertain analysis of acoustic field with interval random parameters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013; **256**: 56—59
- James K R, Dowling D R. A probability density function method for acoustic field uncertainty analysis. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2005; **118**(5): 2802—2810
- James K R, Dowling D R. A method for approximating acoustic-field-amplitude uncertainty caused by environmental uncertainties. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2008; **124**(3): 1465—1476
- James K R, Dowling D R. Pekeris waveguide comparisons of methods for predicting acoustic field amplitude uncertainty caused by a spatially uniform environmental uncertainty. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011; **129**(2): 589—592
- Khine Y Y, Creamer D B, Finette S. Acoustic propagation in an uncertain waveguide environment using stochastic basis expansions. *J. Comput. Acoust.*, 2010; **18**(4): 397—441
- Novick J, Finette S. Stochastic basis expansions applied to acoustic propagation in an uncertain, range, and depth-dependent, multi-layered waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011; **129**(4): 2600
- Finette S. A stochastic response surface formulation of acoustic propagation through an uncertain ocean waveguide environment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2009; **126**(5): 2242—2247
- 吕恩琳. 模糊随机有限元平衡方程的摄动解法. *应用数学和力学*, 1997; **18**(7): 631—638
- Haldar A, Reddy R K. A random-fuzzy analysis of existing structures. *Fuzzy Sets Systems*, 1992; **48**(2): 201—210
- 雷震宇, 陈虬. 基于信息熵的模糊随机结构有限元法. *力学季刊*, 2001; **22**(3): 340—345
- Su Huaizhi, Hu Jiang, Wen Zhiping. Structure analysis for concrete-faced rockfill dams based on information entropy theory and finite element method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2012; **36**: 1041—1055
- Yang L F, Li Q S, Leung A Y T, Zhao Y L, Li G Q. Fuzzy variational principle and its applications. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2002; **21**: 999—1018
- Qiu Zhiping, Ma Lihong, Wang Xiaojun. Non-probabilistic interval analysis method for dynamic response analysis of nonlinear systems with uncertainty. *Journal of Sound and Vibration*, 2009; **319**: 531—540