

覆黏弹层加肋双层板的声反射

龚家元^{1,2,3} 安俊英¹ 马 力² 徐海亭¹

(1 中国科学院声学研究所北海研究站 青岛 266023)

(2 中国科学院水声环境特性重点实验室 北京 100190)

(3 中国科学院大学 北京 100049)

2011 年 12 月 31 日收到

2012 年 8 月 22 日定稿

摘要 为评估覆盖层的吸声性能, 研究黏弹层在无限大周期加肋双层板背衬下的声反射。首先通过弯曲波与 Lamb 波的比较, 揭示了板近似理论不适用于黏弹性板的原因。为此采用 (黏) 弹性理论处理 (黏) 弹性板, 而肋板的处理则采用板近似理论, 并用 Hull 提出的方法解决肋板和平板的耦合问题, 得到反射声场的解。与板近似理论计算加肋双层板声反射的结果进行比较验证了本文方法的正确性, 对反射系数进行计算分析了背衬对声反射的影响, 定义平均反射系数比较了不同覆盖层的性能。结果表明, 频率较低时覆盖层无法有效抑制背衬的影响, 板间流体层与双层板的耦合作用引起共振散射, 肋板与双层板的耦合作用降低声反射。

PACS 数: 43.30, 43.20

Acoustic reflection of rib-stiffened double plates coated with a viscoelastic layer

GONG Jiayuan^{1,2,3} AN Junying¹ MA Li² XU Haiting¹

(1 Qingdao Acoustics Laboratory, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences Qingdao 266023)

(2 Key Laboratory of Underwater Acoustic Environment, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences Beijing 100190)

(3 University of Chinese Academy of Sciences Beijing 100049)

Received Dec. 31, 2011

Revised Aug. 22, 2012

Abstract To predict sound-absorbing performance of anechoic materials, the acoustic reflection problem of a viscoelastic layer backed with periodically rib-stiffened infinite double plates is studied. Firstly, the reason why structural theories of plates are not applicable to viscoelastic plates is explained through comparing flexural waves with Lamb waves. Therefore, (visco-) elastic theory is adopted to deal with (visco-) elastic plates, and ribs are treated by structural theories of plates. The coupling between ribs and plates is solved by Hull's method. Solution of reflection field is obtained at last. The accuracy of present method is validated by comparing results of acoustic reflection from rib-stiffened double plates computed by structural theories of plates. The influence of a backing on acoustic reflection of the viscoelastic layer is analyzed by computing reflection coefficients. Performance of different viscoelastic materials are evaluated by defining the average reflection coefficients. The results show that, influence of a backing on acoustic reflection cannot be suppressed by viscoelastic materials in low frequencies. The resonance is introduced by coupling of the fluid layer and double plates. And ribs, which are coupled with double plates, mainly make acoustic reflection reduced.

引言

声学覆盖层的主要目的之一是减少水下航行器的声反射, 通常引入声反射系数作为评价其吸声性能的重要指标。这方面已开展了大量的理论和实验研究, 结果表明覆盖层的性能不仅取决于覆盖层自

身的材料特性, 也取决于敷设覆盖层时所采用的背衬条件^[1]。实际的水下航行器有时采用实肋板支撑的双层壳体结构, 通常可将其视为无限大加肋双层板模型, 对这种背衬下覆盖层声反射的研究更有实际意义。

由于弹性板的厚度要比其他尺寸小得多, 在振动问题中通常采用结构近似理论进行研究。通过 Kirch-

hoff 假设，很早就建立了薄板近似理论 [2]。薄板理论考虑反对称振动（弯曲振动），它仅适用于低频。Mindlin 在其基础上进一步考虑了转动惯量和剪切效应的影响，建立了中厚板理论，使得频率范围扩展到中高频 [3-4]。板结构近似理论给振动问题的分析带来了很大的方便，有学者认为薄板理论对于黏弹性板也成立 [5-6]，而文献 7 通过将薄板理论的弯曲波与 Lamb 波相比较，得到了薄板理论不适用于黏弹性板的结论。

由于板近似理论在处理黏弹性层时遇到了困难，覆盖黏弹层加肋平板声反射的研究只能建立在（黏）弹性理论的基础上。为解决该问题，一种可行的办法是利用周期性物理场的 Bloch 理论，结合有限元方法来实现 [8-9]。另一种是利用解析方法，如 Hull 在研究覆盖黏弹层加肋单层板的振动响应问题时所提出的周期解方法 [10-11]，它建立在（黏）弹性理论和 Bloch 理论的基础上，并通过推导与泊松公式相类似的求和公式而成功的解决了板和肋之间的耦合问题。

研究覆盖黏弹层加肋双层平板（板间充水）声反射的文献不多，余晓丽等人 [1] 利用薄板理论计算了其反射系数，并与实验结果进行了对比；但该文献仅给出了用板近似理论处理上下平板和肋板的结果，而未说明如何对覆盖层进行处理。实际上板近似理论是不适用于黏弹性层的，本文详细讨论了基于各种板近似理论的弯曲波与 Lamb 波之间的关系，从物理上揭示了板近似理论不适用于黏弹性板的内在原因。为此，本文利用 Hull 周期解方法来处理上下平板和黏弹性层，而肋板则采用板结构近似理论进行处理，得到了反射声场的解。利用板近似理论计算加肋双层板的声反射验证了 Hull 周期解方法的正确性。从能量意义上引入声反射系数，以此计算分析了加肋双层板背衬对声反射的影响。通过对反射系数进行角度统计平均，比较了不同黏弹材料的性能。

1 板近似理论的局限性

板的振动是对称和反对称振动这两种振型的合成，反对称振动产生反对称模态 Lamb 波，对称振动产生对称模态 Lamb 波；而文献 12 指出薄板中的波主要由弯曲振动（即反对称振动）产生，对称振动的作用可以忽略，可见薄板中起主要作用的是反对称 Lamb 波。文献 13 对 A_0 阶 Lamb 波的频散方程作低频近似，再将各个方向传播的 A_0 阶 Lamb 波的低频近似分量叠加起来，得到满足薄板振动方程的薄板弯曲波。由此可知，薄板弯曲波是 A_0 阶 Lamb 波的

低频近似。Mindlin 中厚板理论考虑了转动惯量和剪切效应的影响，是对 Kirchhoff 薄板理论的修正，中厚板弯曲波是对 Lamb 波更高阶的近似。

由于薄板弯曲波、中厚板弯曲波与 Lamb 波存在对应关系，这里通过比较它们的频散曲线和衰减曲线来分析板近似理论的问题。取弹性板为钢板，密度 $\rho_s = 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，杨氏模量 $E = 21.6 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ，泊松系数 $\sigma = 0.28$ ；黏弹性板的密度 $\rho_s^* = 1.1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，杨氏模量 $E_0 = 1.4 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ ，损耗因子 $\eta = 0.23$ ，泊松比 $\sigma^* = 0.49$ 。求解自由板 Lamb 波的频散方程，得到如图 1 和图 2 所示的频散曲线

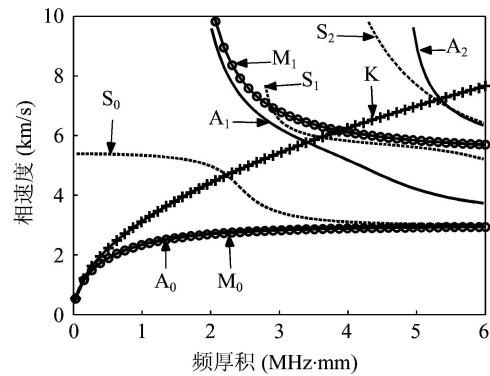
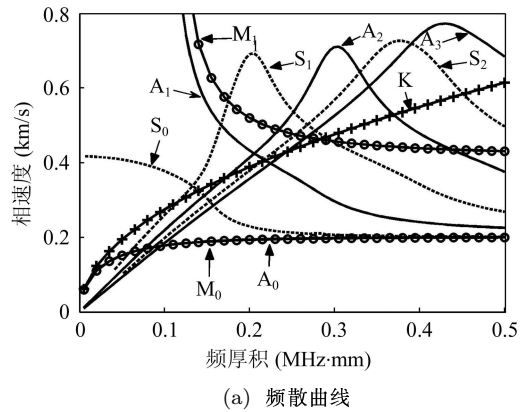
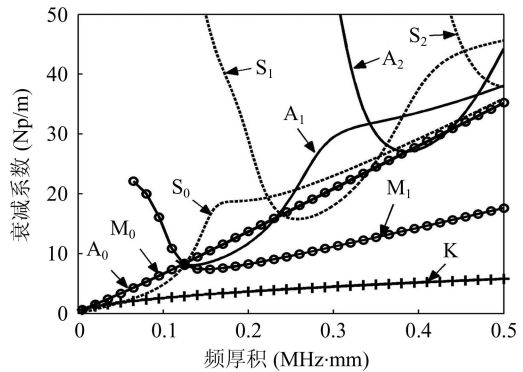


图 1 钢板中弯曲波和 Lamb 波的比较 ($A_0 \sim A_2$ 表示反对称模态的 Lamb 波, $S_0 \sim S_2$ 表示对称模态的 Lamb 波; K 表示薄板弯曲波, $M_0 \sim M_1$ 表示中厚板弯曲波)



(a) 频散曲线



(b) 衰减曲线

图 2 黏弹性板中弯曲波和 Lamb 波的比较 (标记同图 1)

和衰减曲线，其中 Lamb 波相速度 c_p 、衰减系数 α 与复波数 k^* 的关系为 $k^* = \omega/c_p + i\alpha$ 。图 1 和图 2 中的薄板弯曲波和中厚板弯曲波分别由薄板振动方程和中厚板振动方程得到。从图 1 中可见，曲线 K 和 A_0 在频厚积很小时吻合较好，随频厚积升高二者迅速偏离；曲线 M_0 与 A_0 完全吻合，曲线 M_1 与 A_1 则有所不同，其偏差随频厚积而增大，说明中厚板弯曲波能很好的近似 A_0 阶 Lamb 波，但对 A_1 阶 Lamb 波的近似程度不足。对于钢板，可以得到 Kirchhoff 近似理论适用于低频 (约 $fh < 0.15$)，而 Mindlin 近似理论推广至中高频 (约 $fh < 2$) 的结论。从图 2 可见，对于黏弹性板来讲，该结论却是不成立的。这是因为对于钢板而言，在较大的频厚积 (约 $fh < 2$) 下都只存在 A_0 阶 Lamb 波，而对于黏弹性板，即使在频厚积很小时也存在很多阶模态，从能量上来讲， A_0 阶 Lamb 波分量并不占绝对地位，高阶 Lamb 波分量的作用亦不可忽略，故需要考虑一定阶数的 Lamb 波模态才能较精确的描述黏弹性板的声特性。这样，只对 A_0 模态近似的 Kirchhoff 经典理论显然不合适，而只对 A_0 和 A_1 模态近似的 Mindlin 理论也显得不足，这是文献 7 中用近似理论计算黏弹性板反射系数的结果与线黏弹理论完全不同的原因所在。

黏弹性体对声波的阻尼作用主要通过剪切效应来达到，Kirchhoff 经典理论完全忽略了剪切变形为零阶剪切理论；Mindlin 理论仅考虑了一阶剪切变形为一阶剪切理论。为克服其缺陷，发展了高阶剪切理论 (high-order deformation theory)，如 Reddy 简化理论^[14]等。理论上讲，高阶剪切理论能实现对更高阶模态 Lamb 波的近似，对于黏弹性材料声特性的刻画必然要更为准确。但高阶剪切理论通常颇为复杂，不利于工程应用。

由此可知，板近似理论不适用于黏弹性板，对于

另外， $U_m^{(j)}(z)$ 和 $W_m^{(j)}(z)$ 为：

$$U_m^{(j)}(z) = ik_m \left[\exp(-i\alpha_m^{(j)}z) A_m^{(j)} + \exp(i\alpha_m^{(j)}z) B_m^{(j)} \right] + i\beta_m^{(j)} \left[\exp(-i\beta_m^{(j)}z) C_m^{(j)} - \exp(i\beta_m^{(j)}z) D_m^{(j)} \right], \quad (2)$$

$$W_m^{(j)}(z) = -i\alpha_m^{(j)} \left[\exp(-i\alpha_m^{(j)}z) A_m^{(j)} - \exp(i\alpha_m^{(j)}z) B_m^{(j)} \right] + ik_m \left[\exp(-i\beta_m^{(j)}z) C_m^{(j)} + \exp(i\beta_m^{(j)}z) D_m^{(j)} \right], \quad (3)$$

式中，

$$\alpha_m^{(j)} = \sqrt{(k_L^j)^2 - k_m^2},$$

$$\beta_m^{(j)} = \sqrt{(k_T^j)^2 - k_m^2},$$

k_L^j 和 k_T^j 分别为纵波和横波波数。

带有黏弹性材料结构系统的研究通常只能采用严格的 (黏) 弹性理论。为此，本文采用 Hull 所提出的周期解方法来研究覆黏弹层加肋双层板的声反射问题。

2 覆黏弹层加肋双层板的声反射

2.1 平板及流体中声场的形式解

考虑图 3 所示的平面问题。P1 和 P2 表示双层板的上下平板，厚度分别为 h_1 和 h_2 ；P3 表示吸声覆盖层，厚度为 h_3 ；R 表示周期性肋板，间距为 L ，其厚度为 h_r ；F1 和 F3 表示上半空间流体介质，F2 表示板间流体层，层厚为 d 。由 Hull 的周期解方法可得，板 P1, P2 和 P3 中位移的形式解可表示为：

$$\begin{cases} u_j(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m^{(j)}(z) e^{ik_m x}, \\ w_j(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_m^{(j)}(z) e^{ik_m x}, \end{cases} \quad (1)$$

其中， $k_m = k_x + 2\pi m/L$ ， $j = 1, 2, 3$ ， j 分别表示板 P1, P2 和 P3。时间因子为 $\exp(-i\omega t)$ 。

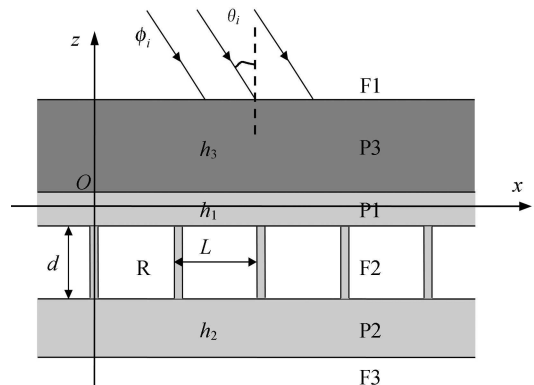


图 3 无限大覆黏弹层加肋双层板 (图中 F 表示流体，P 表示板，R 表示肋)

由位移形势解可得到板 P1, P2 和 P3 中应力的形式解：

$$\tau_{zz}^{(j)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_{zz,m}^{(j)}(z) e^{ik_m x}, \quad (4)$$

其中，

$$T_{zz,m}^{(j)}(z) = - \left[\lambda_j k_m^2 + (\lambda_j + 2\mu_j) \left(\alpha_m^{(j)} \right)^2 \right] \left[\exp \left(-i\alpha_m^{(j)} z \right) A_m^{(j)} + \exp \left(i\alpha_m^{(j)} z \right) B_m^{(j)} \right] + \quad (5)$$

$$2\mu_j k_m \beta_m^{(j)} \left[\exp \left(-i\beta_m^{(j)} z \right) C_m^{(j)} - \exp \left(i\beta_m^{(j)} z \right) D_m^{(j)} \right],$$

$$\tau_{zx}^{(j)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_{zx,m}^{(j)}(z) e^{ik_m x}, \quad (6)$$

其中,

$$T_{zx,m}^{(j)}(z) = \mu_j \left\{ 2k_m \alpha_m^{(j)} \left[\exp \left(-i\alpha_m^{(j)} z \right) A_m^{(j)} - \exp \left(i\alpha_m^{(j)} z \right) B_m^{(j)} \right] + \right. \quad (7)$$

$$\left. \left[\left(\beta_m^{(j)} \right)^2 - k_m^2 \right] \left[\exp \left(-i\beta_m^{(j)} z \right) C_m^{(j)} + \exp \left(i\beta_m^{(j)} z \right) D_m^{(j)} \right] \right\}.$$

对于流体 F1, 设入射波为平面波, 其位移势函数为:

$$\phi_i = \phi_0 \exp \left(-i\gamma_0^{(1)} z \right) \exp \left(ik_x x \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_m \phi_0 \exp \left(-i\gamma_m^{(1)} z \right) e^{ik_m x}, \quad (8)$$

其中,

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases},$$

$$k_x = k_1 \sin(\theta_i),$$

$$\gamma_0^{(1)} = \sqrt{k_1^2 - k_x^2}.$$

并且,

$$k_m = k_x + 2\pi m/L, \quad \gamma_m^{(1)} = \sqrt{k_1^2 - k_m^2}.$$

这里, θ_i 为平面波的入射角.

而相应的反射波可以表示为:

$$\phi_r = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m \phi_0 \exp \left(i\gamma_m^{(1)} z \right) e^{ik_m x}, \quad (9)$$

则流体 F1 中总的位移势函数为:

$$\phi_1 = \phi_i + \phi_r. \quad (10)$$

考虑到上下板的作用, 流体 F2 中声场的位移势函数可以表示为:

$$\phi_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[E_m \exp \left(-i\gamma_m^{(2)} z \right) + F_m \exp \left(i\gamma_m^{(2)} z \right) \right] e^{ik_m x} \quad (11)$$

其中, $\gamma_m^{(2)} = \sqrt{k_2^2 - k_m^2}$.

同样的, 流体 F3 中位移势函数可以表示为:

$$\phi_3 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m \phi_0 \exp \left(-i\gamma_m^{(3)} z \right) e^{ik_m x}, \quad (12)$$

其中, $\gamma_m^{(3)} = \sqrt{k_3^2 - k_m^2}$.

由位移势函数可得到流体 F1, F2 和 F3 中声压及位移的形式解.

2.2 实肋板振动近似理论

由于该问题中肋板的严格处理十分困难, 这里采用较为简单的实肋板纵振动近似理论^[1], 容易得到肋板 R 对上平板 P1 的作用力为:

$$F_1(x, z = -h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{1n} \delta(x - nL), \quad (13)$$

其中,

$$F_{1n}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[PW_m^{(1)}(-h) - QW_m^{(3)}(-h-d) \right] e^{ik_m x}. \quad (14)$$

肋板 R 对下平板 P2 的作用力为:

$$F_2(x, z = -h-d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{2n}(x) \delta(x - nL), \quad (15)$$

其中,

$$F_{2n}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[QW_m^{(1)}(-h) - PW_m^{(3)}(-h-d) \right] e^{ik_m x}, \quad (16)$$

式中,

$$P = [E_{sr} k_{sr} / (1 - \sigma_{sr}^2)] \cot(k_{sr} d),$$

$$Q = E_{sr} k_{sr} / [(1 - \sigma_{sr}^2) \sin(k_{sr} d)],$$

$$h_1 = 2h,$$

这里, E_{sr} 和 σ_{sr} 为肋板的杨氏模量和泊松比, $k_{sr} = \omega/c_{sr}$ 为波数, $c_{sr} = \sqrt{E_{sr}/[\rho_{sr}(1 - \sigma_{sr}^2)]}$ 为波速.

2.3 问题求解

将板 P1 ~ P3、肋板 R 和流体 F1 ~ F3 的形式解代入应力及位移的连续性边界条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{zz}^{(3)}|_{z=a} = -p_1|_{z=a}, \quad \tau_{xz}^{(3)}|_{z=a} = 0, \quad w_3|_{z=a} = w_{F_1}|_{z=a}, \\ \tau_{zz}^{(3)}|_{z=h} = \tau_{zz}^{(1)}|_{z=h}, \quad \tau_{xz}^{(3)}|_{z=h} = \tau_{xz}^{(1)}|_{z=h}, \quad w_3|_{z=h} = w_1|_{z=h}, \quad u_3|_{z=h} = u_1|_{z=h}, \\ \tau_{zz}^{(1)}|_{z=-h} = -p_2|_{z=-h} - F_1, \quad \tau_{xz}^{(1)}|_{z=-h} = 0, \quad w_1|_{z=-h} = u_{F_2}|_{z=-h}, \\ \tau_{zz}^{(2)}|_{z=b} = -p_2|_{z=b} + F_2, \quad \tau_{xz}^{(2)}|_{z=b} = 0, \quad w_2|_{z=b} = u_{F_2}|_{z=b}, \\ \tau_{zz}^{(2)}|_{z=c} = -p_3|_{z=c}, \quad \tau_{xz}^{(2)}|_{z=c} = 0, \quad w_2|_{z=c} = u_{F_3}|_{z=c}. \end{array} \right. \quad (17)$$

并利用三角函数系 $\{\exp(ik_m x)\}$ 的正交性及以下两个求和公式进行化简,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nL) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i2\pi nx}{L}\right), \quad (18)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m(z) e^{ik_m x} \right\} \exp\left(\frac{i2\pi nx}{L}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(z) \right\} e^{ik_m x}, \quad (19)$$

其中, 式 (18) 为泊松求和公式, 式 (19) 为 Hull 求和公式^[11], 这两个公式用以处理平板和肋板之间的耦

合作用。

可以得到一组线性方程组,

$$T_{zz,m}^{(3)}(a) = -\rho_{F_1} \omega^2 \left[\delta_m \phi_0 \exp(-i\gamma_m^{(1)} a) + R_m \phi_0 \exp(i\gamma_m^{(1)} a) \right], \quad (20)$$

$$T_{zx,m}^{(3)}(a) = 0, \quad (21)$$

$$W_m^{(3)}(a) = -i\gamma_m^{(1)} \delta_m \phi_0 \exp(-i\gamma_m^{(1)} a) + i\gamma_m^{(1)} R_m \phi_0 \exp(i\gamma_m^{(1)} a), \quad (22)$$

$$T_{zz,m}^{(3)}(h) = T_{zz,m}^{(1)}(h), \quad (23)$$

$$T_{zx,m}^{(3)}(h) = T_{zx,m}^{(1)}(h), \quad (24)$$

$$W_m^{(3)}(h) = W_m^{(1)}(h), \quad (25)$$

$$U_m^{(3)}(h) = U_m^{(1)}(h), \quad (26)$$

$$T_{zz,m}^{(1)}(-h) = -\rho_{F_2} \omega^2 \left[E_m \exp(i\gamma_m^{(2)} h) + F_m \exp(-i\gamma_m^{(2)} h) \right] - \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[PW_n^{(1)}(-h) - QW_n^{(3)}(b) \right], \quad (27)$$

$$T_{zx,m}^{(1)}(-h) = 0, \quad (28)$$

$$W_m^{(1)}(-h) = -i\gamma_m^{(2)} E_m \exp(i\gamma_m^{(2)} h) + i\gamma_m^{(2)} F_m \exp(-i\gamma_m^{(2)} h), \quad (29)$$

$$T_{zz,m}^{(2)}(b) = -\rho_{F_2} \omega^2 \left[E_m \exp(-i\gamma_m^{(2)} b) + F_m \exp(i\gamma_m^{(2)} b) \right] + \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[QW_n^{(1)}(-h) - PW_n^{(3)}(b) \right], \quad (30)$$

$$T_{zx,m}^{(2)}(b) = 0, \quad (31)$$

$$W_m^{(2)}(b) = -i\gamma_m^{(2)} E_m \exp(-i\gamma_m^{(2)} b) + i\gamma_m^{(2)} F_m \exp(i\gamma_m^{(2)} b), \quad (32)$$

$$T_{zz,m}^{(2)}(c) = -\rho_{F_3} \omega^2 T_m \phi_0 \exp(-i\gamma_m^{(3)} c), \quad (33)$$

$$T_{zx,m}^{(2)}(c) = 0, \quad (34)$$

$$W_m^{(2)}(c) = -i\gamma_m^{(3)} T_m \phi_0 \exp(-i\gamma_m^{(3)} c), \quad (35)$$

其中, $a = h + h_3$, $b = -h - d$, $c = -h - d - h_2$ 。

将应力及位移分量的表达式代入，并将该线性方程组表示为如下的矩阵形式：

$$A_m x_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n x_n + \begin{cases} P, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0, \end{cases} \quad m = -\infty, \dots, \infty \quad (36)$$

其中，待求系数 x_m 为如下矢量形式：

$$x_m = \left\{ R_m \begin{matrix} A_m^{(3)} & B_m^{(3)} & C_m^{(3)} & D_m^{(3)} & A_m^{(1)} \\ B_m^{(1)} & C_m^{(1)} & D_m^{(1)} & E_m & F_m & A_m^{(2)} \\ B_m^{(2)} & C_m^{(2)} & D_m^{(2)} & T_m \end{matrix} \right\}, \quad (37)$$

而 A_m 和 F_n 为 16×16 的矩阵， P 为 1×16 的矢量，具体表达式见附录 A。

经进一步整理，可以得到：

$$(\hat{A} - \hat{F}) \hat{x} = \hat{P}, \quad (38)$$

其中，

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & A_{-1} & 0 & 0 & & \\ \dots & 0 & A_0 & 0 & \dots & \\ & 0 & 0 & A_1 & & \\ \ddots & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & F_{-1} & F_0 & F_1 & & \\ \dots & F_{-1} & F_0 & F_1 & \dots & \\ & F_{-1} & F_0 & F_1 & & \\ \ddots & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$\hat{P} = \left[\dots \quad 0^T \quad P^T \quad 0^T \quad \dots \right]^T,$$

$$\hat{x} = \left[\dots \quad (x_{-1})^T \quad (x_0)^T \quad (x_1)^T \quad \dots \right]^T.$$

由式 (38) 可以求得系数 R_m ，代入式 (9) 可得反射声场的解。

3 数值结果

式 (9) 将反射声场展开为平面波分量叠加的形式， m 阶反射平面波分量的传播方向为 $\{k_m, \gamma_m^{(1)}\}$ 。当 $m = 0$ 时表示的是镜反射波分量；当 $m \neq 0$ 时， $(\gamma_m^{(1)})^2 > 0$ 对应的为非镜反射波分量，而 $(\gamma_m^{(1)})^2 < 0$ 对应的为沿 x 轴正方向传播，且幅度沿 z 轴正方向

衰减的非均匀波分量。与无肋情况只存在镜反射波不同，分析加肋双层板背衬下黏弹覆盖层的性能时，除镜反射波分量外，还需要考虑非镜反射波和非均匀波分量的作用。由于非均匀波仅在板面附近存在，在远场其影响可忽略，而对于目标散射特性而言远场通常更有意义，对于声反射系数的自由场测试也多在大样的远场进行，因此只需要计及镜反射波分量和非镜反射波分量的贡献。黏弹覆盖层的目的是为减小声反射，其机理是将声能通过阻尼作用转化为热能而实现，为描述其对于声能的损耗作用，引入如下定义的声反射系数^[8-9]，

$$R(\theta_i, f) = \sqrt{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |R_m|^2}, \quad (\gamma_m^{(1)})^2 > 0, \quad (39)$$

它是能量意义上的广义反射系数，是对反射声场中镜反射波和非镜反射传播波分量的能量之和的综合量度。从定义可知，反射系数 R 必然要小于 1。

3.1 方法验证

为验证 Hull 周期解方法的正确性，不妨取上平板 P1、下平板 P2、覆盖层 P3 及肋板 R 均为钢板。P1 和 P3 的厚度之和为 0.8 cm，P2 的厚度为 3 cm。取流体介质 F1、F2 和 F3 均为水。水的密度为 1000 kg/m³，声速为 1500 m/s。入射角为 30°。分别利用 Kirchhoff 薄板理论和 Mindlin 中厚板理论求得加肋双层板的反射声场（结果见附录 B），并与 Hull 周期解方法的结果对比，如图 4 所示。可见 Hull 周期解方法的计算结果与 Mindlin 理论吻合很好，与薄板理论也基本一致。

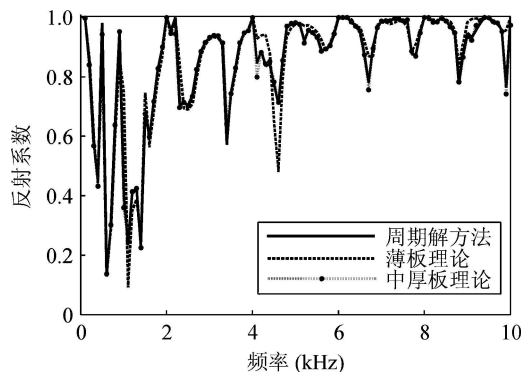


图 4 Hull 周期解方法的对比验证

3.2 声反射计算与分析

对图 3 所示的问题，默认取上平板 P1、下平板 P2 和肋板 R 为钢板，覆盖层 P3 为黏弹性板。上下平板的厚度分别为 0.8 cm 和 3 cm，黏弹性板的厚度为 5 cm。上下平板的间距为 0.8 m，肋板间距为 0.5 m。流体 F1 和 F2 为水，流体 F3 为空气。空气

的密度为 1.29 kg/m^3 , 声速为 340 m/s 。

取 F2 分别为水或空气, 入射角为 $\theta_i = 30^\circ$, 分别计算有肋和无肋双层板的反射系数, 结果如图 5(a) 所示, 比较曲线 (2) 和 (3) 可知, 板间流体层为水时与上、下平板耦合而产生强烈的共振峰, 这是由于在频率较低时从上平板透射进入中间水层的能量很强的缘故, 随频率增加透入的声能降低, 共振现象逐渐减弱。这说明频率较低时黏弹层对板间水层产生的共振无法有效的抑制。比较曲线 (1) 和 (2) 可知, 在低频时肋板与平板的耦合作用对反射系数有很大的影响, 它使得反射系数比无肋情况要小一些。这是因为肋板形成非均匀波分布在板面附近的流体 F1 及板间流体层 F2 中, 并沿与板面平行的方向传播, 由于它占有一部分声能, 从声反射的角度来看, 相当于起到“消耗”部分声能, 降低声反射的作用。这说明低频时肋板与上、下平板的耦合作用提高了黏弹层的吸声性能。另外, 对于某一入射角度, 非均匀波仅在一定频率以上才存在, 这一点从图 7(b) 可以看出。与无肋情况形成均匀的反射场不同, 加肋情况的反射声场产生了干涉现象, 从 5(b) 可观察到清晰的干涉条纹, 这是肋板形成的镜反射波和非镜反射波分量相互作用的结果。

图 6 给出反射系数和反射声场的角度 - 频率图, 比较图 6(a) 和图 6(b) 可见, 二者的特性基本一致, 这说明图中所示的共振现象实际上是各阶反射平面波分量 (幅度 $|R_m|$) 产生共振的综合结果。在频率较高时, 板间水层与上、下平板耦合作用引起的共振散射近似符合 $2d \cos \theta_i = n\lambda, n = 1, 2, \dots$ 的关系 (即图中所示的黑色点线), 其中 θ_i 为入射角, λ 为波长。这是因为进入水层的声波在上下平板间周期性的反射, 这些反射声线在一定入射角和频率下相位一致产生相长干涉 (共振), 相当于在平面波导中产生简正波, 这时从上平板透射出去的声波亦发生共振。高频时水层波导的上下界面可近似为刚性的, 这时简正波需要满足的条件即为 $2d \cos \theta_i = n\lambda, n = 1, 2, \dots$ 。而低频时波导的界面不能近似为刚性, 这时简正波产生的条件较为复杂, 不满足前面的简单关系。

从物理上讲, 周期性的肋板与上下平板耦合作用必然要产生 Bragg 共振散射, 这一共振散射满足 $2L \sin \theta_i = n\lambda, n = 1, 2, \dots$ 的关系。但从图 6 中却观察不到肋板产生的 Bragg 散射现象。图 7 为覆黏弹层加肋单层板 (板厚 0.8 cm , 黏弹层 2 cm) 反射系数的频率 - 角度图。从图 7(a) 可见, 肋板引起的 Bragg 散射无法观察到, 引起的 Bloch 散射则不明显。若去

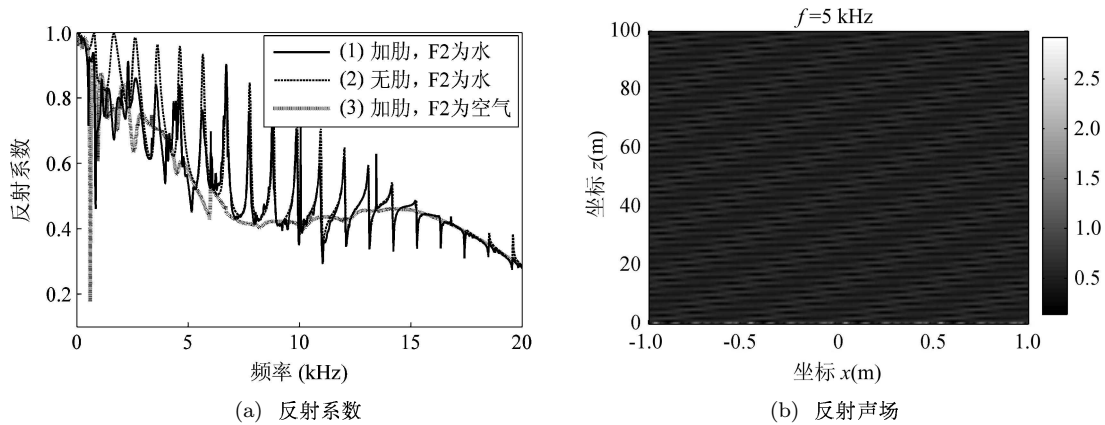


图 5 覆黏弹层加肋双层平板的声反射

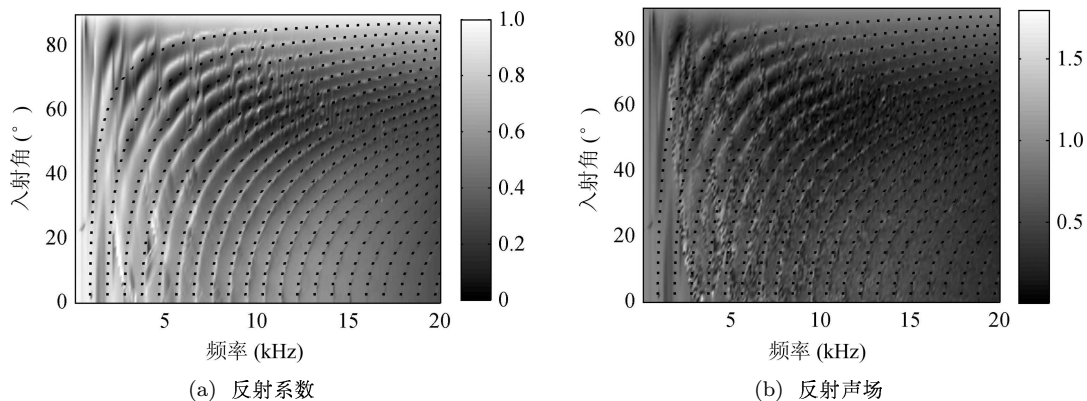


图 6 覆黏弹层加肋双层板声反射的角度 - 频率图

掉镜反射波，如图 7(b)，则可以观察到较为明显的前向和后向 Bloch 散射现象，但 Bragg 散射现象仍然观察不到。这说明对于实际大尺度的目标而言，肋板与平板耦合引起的 Bragg 共振散射可能较弱以至于不明显。

对于肋板与水层的耦合作用的处理，目前国内外还没有合适的方法。由于肋板通常很薄，并且其上挖有一些透水孔，这时肋板与水层的耦合作用较弱，因此本文将肋板假设为声透明。若考虑肋板与水层的耦合作用，则水层在相邻的两个肋板与上下平板之间都要产生共振。与前文分析类似，在频率较高时，肋板以及上下平板形成角反射体，其界面可近似为刚性，于是水层在相邻肋板之间产生共振的条件近似为 $2L \sin \theta_i = n\lambda$, $n = 1, 2, \dots$ ；在上下平板之间产生共振的条件近似为 $2d \cos \theta_i = n\lambda$, $n = 1, 2, \dots$ 。特别的，当水层在肋板间共振时，由周期性的各角反射体透射出的声波相位一致，形成几何共振，从而使得肋板间的水层共振显著增强。而在频率较低时，界面不能近似为刚性，水层发生共振的条件比较复杂，不满足这些简单的关系。

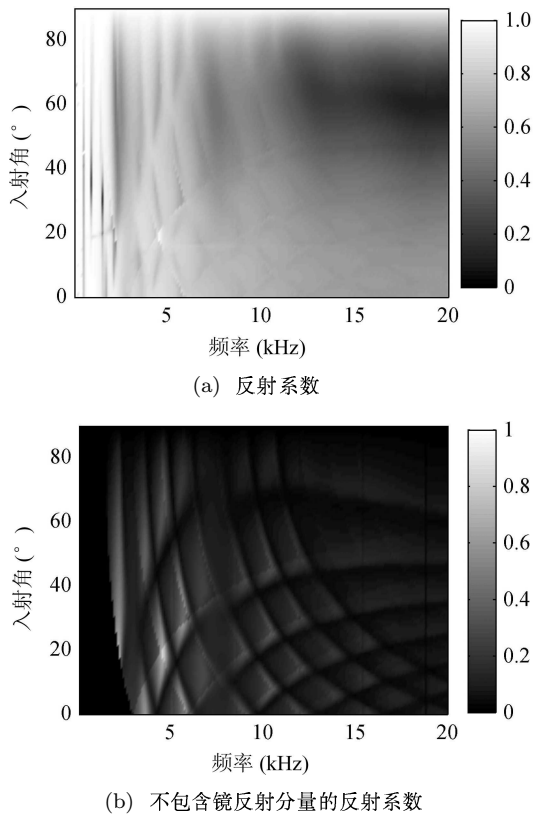


图 7 覆黏弹层加肋单层板反射系数的频率 - 角度图

3.3 覆盖层性能评价

从式 (39) 可知，反射系数与入射角有关，不同的入射角时覆盖层的吸声性能不同，这一物理量用

于认识覆盖层的吸声性能显得不够直观，也难以用于比较不同材料的覆盖层的性能优劣。为此，对反射声场的声能进行角度统计平均，引入如下所定义的平均反射系数，

$$\bar{R}(f) = \sqrt{\frac{\int_0^{\pi/2} R^2(\theta_i, f) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i}{\int_0^{\pi/2} \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i}}, \quad (40)$$

其中， $R(\theta_i, f)$ 为式 (39) 所定义的声反射系数。平均反射系数描述了覆盖层在各种可能的入射角度下对声波的平均吸声性能，它仅与频率有关。

将前文中的黏弹材料设为材料 1，再取一种黏弹性材料，设为材料 2，其密度 $\rho_s^* = 1.09 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，杨氏模量 $E_0 = 3 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ ，损耗因子 $\eta = 0.249$ ，泊松比 $\sigma^* = 0.49$ 。比较二者的平均反射系数，如图 8 所示。从图 8 可见，材料 1 的性能总体上要优于材料 2。频率较低时，材料 1 和材料 2 在加肋情况下的平均反射系数要低于无肋情况，因此低频时肋板与上、下平板的耦合作用总体上是起到降低声反射的作用，同时材料 1 情况肋板对声反射的减小要大于材料 2。另外，平均反射系数将共振峰平滑，体现不了板间水层的作用，这说明平均反射系数不适合用于分析目标的散射特征，而仅仅适合用于评价覆盖层优劣。图 9 为性能相近的不同黏弹材料构成的

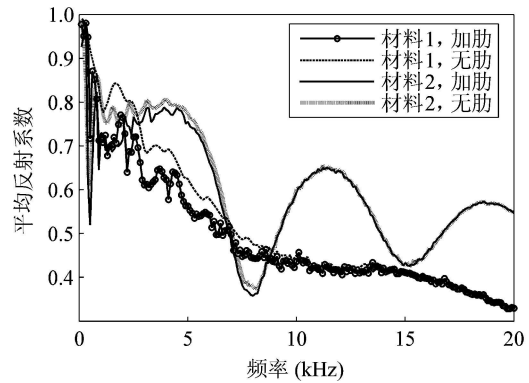


图 8 性能相差较大的不同黏弹层平均反射系数的比较

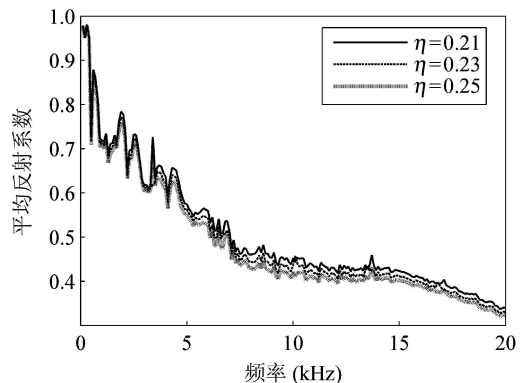


图 9 性能相近的不同黏弹层平均反射系数的比较

覆盖层的平均反射系数的比较结果, 这里三种材料的损耗因子分别为 0.21, 0.23 和 0.25, 其他参数均与黏弹材料 1 相同。从图 9 可以看出, 平均反射系数对于性能十分接近的吸声材料亦有较好的判别能力。

4 结论

本文首先通过弯曲波与 Lamb 波的关系, 从物理机理上分析了板近似理论不适用于黏弹性板 (大阻尼材料) 的内在原因, 薄板理论和 Mindlin 理论分别属于零阶和一阶剪切理论, 其近似程度不足, 高阶剪切理论由于复杂性而不利于工程应用。为此, 采用 Hull 周期解方法求解了无限大覆黏弹层加肋双层板的声反射问题, 从能量意义上引入声反射系数, 并通过对其角度统计平均以评价不同黏弹材料的性能。计算结果表明背衬对覆盖层的声反射有重要的影响, 低频时黏弹层无法有效抑制板间流体层引起的强烈共振散射, 而肋板使得反射场变得复杂, 除镜反射波外, 还形成非镜反射的传播波和非均匀波, 从而产生干涉效应。肋板、流体层以及上下平板的耦合作用均为产生共振散射的因素, 流体层与上下平板的耦合作用引起的强烈共振散射在高频时近似符合 $2d \cos \theta_i = n\lambda$, $n = 1, 2, \dots$ 的关系, 而肋板与平板耦合形成的 Bragg 共振散射对于实际大尺度目标而言不明显 (其原因尚待研究)。反射系数可用于分析目标的散射特征, 而平均反射系数则仅用于比较不同材料覆盖层的性能优劣 (是否可作为其指标尚需充分研究)。由它们可得覆盖层的回声降低和吸声系数等参量。

文中对肋板的处理只考虑了肋板与上下平板的相互作用, 而忽略了肋板与板间流体的相互作用, 对其更严格的处理尚待今后工作中进一步研究。此

外, 问题得到的线性方程组是病态的, 尚需寻求合适的方法以提高计算结果的稳定性。

参 考 文 献

- 1 余晓丽, 俞孟萨. 敷设声学覆盖层的双层加肋平板的声反射预报研究. 第十一届船舶水下噪声学术讨论会论文集, 2007: 77—86
- 2 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学. 北京: 科学出版社, 1956: 253—296
- 3 Mindlin R D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic plates. *J. App. Mech.*, 1951; **18**: 31—38
- 4 Junger M C. Sound structure and their interaction. The MIT press, 1972: 152—156
- 5 何祚镛. 水声作用下矩形弹性—粘弹性复合板的振动和散射声近场 (I): 矩形复合板的振动分析. 声学学报, 1985; **10**(6): 345—357
- 6 周银锋, 王忠民. 轴向运动粘弹性板的横向振动特性. 应用力学和数学, 2007; **28**(2): 191—199
- 7 龚家元, 徐海亭. 薄板理论对粘弹性板适用性的探讨. 第十三届船舶水下噪声学术讨论会论文集, 2011: 58—62
- 8 谭红波, 赵洪, 徐海亭. 有限元法研究结构粘弹性层的声特性. 声学学报, 2003; **28**(2): 277—282
- 9 安俊英, 陈建平, 徐海亭. 钢板—空气背衬上含空腔粘弹性材料层的声反射. 应用声学, 2004; **23**(4): 31—37
- 10 Hull A J. Dynamic response of an elastic plate containing periodic masses. *J. Sound Vib.*, 2008; **310**: 1—20
- 11 Hull A J, Welch J R. Elastic response of an acoustic coating on a rib-stiffened plate. *J. Sound Vib.*, 2010; **329**: 4192—4211
- 12 沈杰罗夫. 水声学波动问题. 北京: 国防工业出版社, 1983: 261—275
- 13 张海澜. 理论声学. 北京: 高等教育出版社, 2007: 474—477
- 14 Reddy J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J. App. Mech.*, 1984; **51**(4): 745—752

附录 A

(1) 矩阵 \mathbf{A}_m 的非零项如下:

$$\begin{aligned}
 a_{1,1}^m &= \rho_{F_1} \omega^2 \phi_0 \exp(i\gamma_m^{(1)} a), \quad a_{1,2}^m = -\left[\lambda_3 k_m^2 + (\lambda_3 + 2\mu_3) (\alpha_m^{(3)})^2\right] \exp(-i\alpha_m^{(3)} a), \\
 a_{1,3}^m &= -\left[\lambda_3 k_m^2 + (\lambda_3 + 2\mu_3) (\alpha_m^{(3)})^2\right] \exp(i\alpha_m^{(3)} a), \quad a_{1,4}^m = 2\mu_3 k_m \beta_m^{(3)} \exp(-i\beta_m^{(3)} a), \\
 a_{1,5}^m &= -2\mu_3 k_m \beta_m^{(3)} \exp(i\beta_m^{(3)} a), \\
 a_{2,2}^m &= 2k_m \alpha_m^{(3)} \exp(-i\alpha_m^{(3)} a), \quad a_{2,3}^m = -2k_m \alpha_m^{(3)} \exp(i\alpha_m^{(3)} a), \\
 a_{2,4}^m &= \left[(\beta_m^{(3)})^2 - k_m^2\right] \exp(-i\beta_m^{(3)} a), \quad a_{2,5}^m = \left[(\beta_m^{(3)})^2 - k_m^2\right] \exp(i\beta_m^{(3)} a), \\
 a_{3,1}^m &= -i\gamma_m^{(1)} \phi_0 \exp(i\gamma_m^{(1)} a), \quad a_{3,2}^m = -i\alpha_m^{(3)} \exp(-i\alpha_m^{(3)} a), \quad a_{3,3}^m = i\alpha_m^{(3)} \exp(i\alpha_m^{(3)} a), \\
 a_{3,4}^m &= ik_m \exp(-i\beta_m^{(3)} a), \quad a_{3,5}^m = ik_m \exp(i\beta_m^{(3)} a),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,2}^m &= - \left[\lambda_3 k_m^2 + (\lambda_3 + 2\mu_3) (\alpha_m^{(3)})^2 \right] \exp \left(-i\alpha_m^{(3)} h \right), \\
a_{4,3}^m &= - \left[\lambda_3 k_m^2 + (\lambda_3 + 2\mu_3) (\alpha_m^{(3)})^2 \right] \exp \left(i\alpha_m^{(3)} h \right), \\
a_{4,4}^m &= 2\mu_3 k_m \beta_m^{(3)} \exp \left(-i\beta_m^{(3)} h \right), \quad a_{4,5}^m = -2\mu_3 k_m \beta_m^{(3)} \exp \left(i\beta_m^{(3)} h \right), \\
a_{4,6}^m &= \left[\lambda_1 k_m^2 + (\lambda_1 + 2\mu_1) (\alpha_m^{(1)})^2 \right] \exp \left(-i\alpha_m^{(1)} h \right), \\
a_{4,7}^m &= \left[\lambda_1 k_m^2 + (\lambda_1 + 2\mu_1) (\alpha_m^{(1)})^2 \right] \exp \left(i\alpha_m^{(1)} h \right), \\
a_{4,8}^m &= -2\mu_1 k_m \beta_m^{(1)} \exp \left(-i\beta_m^{(1)} h \right), \quad a_{4,9}^m = 2\mu_1 k_m \beta_m^{(1)} \exp \left(i\beta_m^{(1)} h \right), \\
a_{5,2}^m &= 2\mu_3 k_m \alpha_m^{(3)} \exp \left(-i\alpha_m^{(3)} h \right), \quad a_{5,3}^m = -2\mu_3 k_m \alpha_m^{(3)} \exp \left(i\alpha_m^{(3)} h \right), \\
a_{5,4}^m &= \mu_3 \left[(\beta_m^{(3)})^2 - k_m^2 \right] \exp \left(-i\beta_m^{(3)} h \right), \quad a_{5,5}^m = \mu_3 \left[(\beta_m^{(3)})^2 - k_m^2 \right] \exp \left(i\beta_m^{(3)} h \right), \\
a_{5,6}^m &= -2\mu_1 k_m \alpha_m^{(1)} \exp \left(-i\alpha_m^{(1)} h \right), \quad a_{5,7}^m = 2\mu_1 k_m \alpha_m^{(1)} \exp \left(i\alpha_m^{(1)} h \right), \\
a_{5,8}^m &= -\mu_1 \left[(\beta_m^{(1)})^2 - k_m^2 \right] \exp \left(-i\beta_m^{(1)} h \right), \quad a_{5,9}^m = -\mu_1 \left[(\beta_m^{(1)})^2 - k_m^2 \right] \exp \left(i\beta_m^{(1)} h \right), \\
a_{6,2}^m &= -i\alpha_m^{(3)} \exp \left(-i\alpha_m^{(3)} h \right), \quad a_{6,3}^m = i\alpha_m^{(3)} \exp \left(i\alpha_m^{(3)} h \right), \quad a_{6,4}^m = ik_m \exp \left(-i\beta_m^{(3)} h \right), \\
a_{6,5}^m &= ik_m \exp \left(i\beta_m^{(3)} h \right), \quad a_{6,6}^m = i\alpha_m^{(1)} \exp \left(-i\alpha_m^{(1)} h \right), \quad a_{6,7}^m = -i\alpha_m^{(1)} \exp \left(i\alpha_m^{(1)} h \right), \\
a_{6,8}^m &= -ik_m \exp \left(-i\beta_m^{(1)} h \right), \quad a_{6,9}^m = -ik_m \exp \left(i\beta_m^{(1)} h \right), \\
a_{7,2}^m &= ik_m \exp \left(-i\alpha_m^{(3)} h \right), \quad a_{7,3}^m = ik_m \exp \left(i\alpha_m^{(3)} h \right), \quad a_{7,4}^m = i\beta_m^{(3)} \exp \left(-i\beta_m^{(3)} h \right), \\
a_{7,5}^m &= -i\beta_m^{(3)} \exp \left(i\beta_m^{(3)} h \right), \quad a_{7,6}^m = -ik_m \exp \left(-i\alpha_m^{(1)} h \right), \quad a_{7,7}^m = -ik_m \exp \left(i\alpha_m^{(1)} h \right), \\
a_{7,8}^m &= -i\beta_m^{(1)} \exp \left(-i\beta_m^{(1)} h \right), \quad a_{7,9}^m = i\beta_m^{(1)} \exp \left(i\beta_m^{(1)} h \right), \\
a_{8,6}^m &= - \left[\lambda_1 k_m^2 + (\lambda_1 + 2\mu_1) (\alpha_m^{(1)})^2 \right] \exp \left(i\alpha_m^{(1)} h \right), \\
a_{8,7}^m &= - \left[\lambda_1 k_m^2 + (\lambda_1 + 2\mu_1) (\alpha_m^{(1)})^2 \right] \exp \left(-i\alpha_m^{(1)} h \right), \\
a_{8,8}^m &= 2\mu_1 k_m \beta_m^{(1)} \exp \left(i\beta_m^{(1)} h \right), \quad a_{8,9}^m = -2\mu_1 k_m \beta_m^{(1)} \exp \left(-i\beta_m^{(1)} h \right), \\
a_{8,10}^m &= \rho_{F_2} \omega^2 \exp \left(i\gamma_m^{(2)} h \right), \quad a_{8,11}^m = \rho_{F_2} \omega^2 \exp \left(-i\gamma_m^{(2)} h \right), \\
a_{9,6}^m &= 2k_m \alpha_m^{(1)} \exp \left(i\alpha_m^{(1)} h \right), \quad a_{9,7}^m = -2k_m \alpha_m^{(1)} \exp \left(-i\alpha_m^{(1)} h \right), \\
a_{9,8}^m &= \left[(\beta_m^{(1)})^2 - k_m^2 \right] \exp \left(i\beta_m^{(1)} h \right), \quad a_{9,9}^m = \left[(\beta_m^{(1)})^2 - k_m^2 \right] \exp \left(-i\beta_m^{(1)} h \right), \\
a_{10,6}^m &= -i\alpha_m^{(1)} \exp \left(i\alpha_m^{(1)} h \right), \quad a_{10,7}^m = i\alpha_m^{(1)} \exp \left(-i\alpha_m^{(1)} h \right), \quad a_{10,8}^m = ik_m \exp \left(i\beta_m^{(1)} h \right), \\
a_{10,9}^m &= ik_m \exp \left(-i\beta_m^{(1)} h \right), \quad a_{10,10}^m = i\gamma_m^{(2)} \exp \left(i\gamma_m^{(2)} h \right), \quad a_{10,11}^m = -i\gamma_m^{(2)} \exp \left(-i\gamma_m^{(2)} h \right), \\
a_{11,10}^m &= \rho_{F_2} \omega^2 \exp \left(-i\gamma_m^{(2)} b \right), \quad a_{11,11}^m = \rho_{F_2} \omega^2 \exp \left(i\gamma_m^{(2)} b \right), \\
a_{11,12}^m &= - \left[\lambda_2 k_m^2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) (\alpha_m^{(2)})^2 \right] \exp \left(-i\alpha_m^{(2)} b \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11,13}^m &= - \left[\lambda_2 k_m^2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \left(\alpha_m^{(2)} \right)^2 \right] \exp \left(i\alpha_m^{(2)} b \right), \\
a_{11,14}^m &= 2\mu_2 k_m \beta_m^{(2)} \exp \left(-i\beta_m^{(2)} b \right), \quad a_{11,15}^m = -2\mu_2 k_m \beta_m^{(2)} \exp \left(i\beta_m^{(2)} b \right), \\
a_{12,12}^m &= 2k_m \alpha_m^{(2)} \exp \left(-i\alpha_m^{(2)} b \right), \quad a_{12,13}^m = -2k_m \alpha_m^{(2)} \exp \left(i\alpha_m^{(2)} b \right), \\
a_{12,14}^m &= \left[\left(\beta_m^{(2)} \right)^2 - k_m^2 \right] \exp \left(-i\beta_m^{(2)} b \right), \quad a_{12,15}^m = \left[\left(\beta_m^{(2)} \right)^2 - k_m^2 \right] \exp \left(i\beta_m^{(2)} b \right), \\
a_{13,10}^m &= i\gamma_m^{(2)} \exp \left(-i\gamma_m^{(2)} b \right), \quad a_{13,11}^m = -i\gamma_m^{(2)} \exp \left(i\gamma_m^{(2)} b \right), \quad a_{13,12}^m = -i\alpha_m^{(2)} \exp \left(-i\alpha_m^{(2)} b \right), \\
a_{13,13}^m &= i\alpha_m^{(2)} \exp \left(i\alpha_m^{(2)} b \right), \quad a_{13,14}^m = ik_m \exp \left(-i\beta_m^{(2)} b \right), \quad a_{13,15}^m = ik_m \exp \left(i\beta_m^{(2)} b \right), \\
a_{14,12}^m &= - \left[\lambda_2 k_m^2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \left(\alpha_m^{(2)} \right)^2 \right] \exp \left(-i\alpha_m^{(2)} c \right), \\
a_{14,13}^m &= - \left[\lambda_2 k_m^2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \left(\alpha_m^{(2)} \right)^2 \right] \exp \left(i\alpha_m^{(2)} c \right), \\
a_{14,14}^m &= 2\mu_2 k_m \beta_m^{(2)} \exp \left(-i\beta_m^{(2)} c \right), \quad a_{14,15}^m = -2\mu_2 k_m \beta_m^{(2)} \exp \left(i\beta_m^{(2)} c \right), \\
a_{14,16}^m &= \rho_{F_3} \omega^2 \phi_0 \exp \left(-i\gamma_m^{(3)} c \right), \\
a_{15,12}^m &= 2k_m \alpha_m^{(2)} \exp \left(-i\alpha_m^{(2)} c \right), \quad a_{15,13}^m = -2k_m \alpha_m^{(2)} \exp \left(i\alpha_m^{(2)} c \right), \\
a_{15,14}^m &= \left[\left(\beta_m^{(2)} \right)^2 - k_m^2 \right] \exp \left(-i\beta_m^{(2)} c \right), \quad a_{15,15}^m = \left[\left(\beta_m^{(2)} \right)^2 - k_m^2 \right] \exp \left(i\beta_m^{(2)} c \right), \\
a_{16,12}^m &= -i\alpha_m^{(2)} \exp \left(-i\alpha_m^{(2)} c \right), \quad a_{16,13}^m = i\alpha_m^{(2)} \exp \left(i\alpha_m^{(2)} c \right), \\
a_{16,14}^m &= ik_m \exp \left(-i\beta_m^{(2)} c \right), \quad a_{16,15}^m = ik_m \exp \left(i\beta_m^{(2)} c \right), \quad a_{16,16}^m = i\gamma_m^{(3)} \phi_0 \exp \left(-i\gamma_m^{(3)} c \right),
\end{aligned}$$

(2) 矩阵 F_n 的非零项为:

$$\begin{aligned}
f_{8,6}^n &= \frac{P}{L} i\alpha_n^{(1)} \exp \left(i\alpha_n^{(1)} h \right), \quad f_{8,7}^n = -\frac{P}{L} i\alpha_n^{(1)} \exp \left(-i\alpha_n^{(1)} h \right), \quad f_{8,8}^n = -\frac{P}{L} ik_n \exp \left(i\beta_n^{(1)} h \right), \\
f_{8,9}^n &= -\frac{P}{L} ik_n \exp \left(-i\beta_n^{(1)} h \right), \quad f_{8,12}^n = -\frac{Q}{L} i\alpha_n^{(2)} \exp \left(-i\alpha_n^{(2)} b \right), \quad f_{8,13}^n = \frac{Q}{L} i\alpha_n^{(2)} \exp \left(i\alpha_n^{(2)} b \right), \\
f_{8,14}^n &= \frac{Q}{L} ik_n \exp \left(-i\beta_n^{(2)} b \right), \quad f_{8,15}^n = \frac{Q}{L} ik_n \exp \left(i\beta_n^{(2)} b \right), \\
f_{11,6}^n &= -\frac{Q}{L} i\alpha_n^{(1)} \exp \left(i\alpha_n^{(1)} h \right), \quad f_{11,7}^n = \frac{Q}{L} i\alpha_n^{(1)} \exp \left(-i\alpha_n^{(1)} h \right), \quad f_{11,8}^n = \frac{Q}{L} ik_n \exp \left(i\beta_n^{(1)} h \right), \\
f_{11,9}^n &= \frac{Q}{L} ik_n \exp \left(-i\beta_n^{(1)} h \right), \quad f_{11,12}^n = \frac{P}{L} i\alpha_n^{(2)} \exp \left(-i\alpha_n^{(2)} b \right), \quad f_{11,13}^n = -\frac{P}{L} i\alpha_n^{(2)} \exp \left(i\alpha_n^{(2)} b \right), \\
f_{11,14}^n &= -\frac{P}{L} ik_n \exp \left(-i\beta_n^{(2)} b \right), \quad f_{11,15}^n = -\frac{P}{L} ik_n \exp \left(i\beta_n^{(2)} b \right),
\end{aligned}$$

(3) 矢量 P 的非零项为:

$$p_1 = -\rho_{F_1} \omega^2 \phi_0 \exp \left(-i\gamma_0^{(1)} a \right), \quad p_3 = -i\gamma_0^{(1)} \phi_0 \exp \left(-i\gamma_0^{(1)} a \right),$$

其中, ρ_{F_i} , c_i ($i = 1, 2, 3$) 为流体 F1~F3 的声参数。 ρ_i , λ_i , μ_i ($i = 1, 2, 3$) 为板 P1~P3 的材料参数。

附录 B: 薄板理论和 Mindlin 理论计算加肋双层板的声反射

各阶反射平面波分量的系数为:

$$R_n = \left[1 - 2 \frac{M_2(k_{nx}) N_1(k_{nx})}{\Delta(k_{nx})} \right] \delta_n - \frac{1}{d} \frac{F_{01} M_2(k_{nx}) - F_{02} N_2(k_{nx})}{\phi_0 \Delta(k_{nx})} N_1(k_{nx}),$$

式中,

$$k_{nx} = k_x + \frac{2n\pi}{d}, \quad k_x = k_1 \sin \theta_i, \quad \delta_n = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}, \quad n = -\infty, \dots, \infty.$$

$$\Delta(k_x) = M_1(k_x) M_2(k_x) - N_2^2(k_x), \quad M_1(k_x) = X_1(k_x) + \frac{\rho_1 \omega^2}{ik_{1z}} + \frac{\rho_2 \omega^2}{ik_{2z}} \cot(k_{2z}h),$$

$$M_2(k_x) = X_2(k_x) + \frac{\rho_3 \omega^2}{ik_{3z}} + \frac{\rho_2 \omega^2}{k_{2z}} \cot(k_{2z}h), \quad N_2(k_x) = \frac{\rho_2 \omega^2}{k_{2z} \sin(k_{2z}h)},$$

其中, $k_{jz} = \sqrt{k_j^2 - k_x^2}$, $j = 1, 2, 3$.

对于薄板理论:

$$X_i(k_x) = D_i \left(k_x^4 - \frac{\omega^2}{\gamma_i^2} \right), \quad i = 1, 2$$

对于 Mindlin 理论:

$$X_i(k_x) = \frac{D_i k_x^4 - \omega^2 \left(\frac{\rho_{s_i} D_i}{\kappa_i^2 G_i} + \frac{\rho_{s_i} h_i^2}{12} \right) k_x^2 + \left(\frac{\rho_{s_i}^2 h_i^3 \omega^4}{12 \kappa_i^2 G_i} - \rho_{s_i} h_i \omega^2 \right)}{1 + \frac{D_i}{\kappa_i^2 G_i h_i} k_x^2 - \frac{\rho_{s_i} h_i^2 \omega^2}{12 \kappa_i^2 G_i}}, \quad i = 1, 2$$

另外, F_{01} 和 F_{02} 的求解过程较为繁琐, 限于篇幅不给出。具体推导方法可参考文献 1, 各参数定义见文献 7。