

有内共振时的扬声器分谐波和混沌*

张志良 刘世清 李小菊

(浙江师范大学物理系 浙江 321004)

2010 年 9 月 3 日收到

2011 年 4 月 13 日定稿

摘要 研究了当轴对称模态由驱动力共振激发, 并且轴对称模态和非轴对称模态存在 2:1 内共振时的扬声器辐射体薄壳的分谐波和混沌。采用多尺度法分析了非线性模态方程的稳态解及其稳定性, 由此进一步确定了驱动频率和驱动力平面上的分岔集。给出了所考虑情形下扬声器分谐波的阈值电压公式, 该阈值电压低于无内共振时的阈值电压。除出现非轴对称模态的 1/2 分谐波振动外, 2 个模态的振幅经 Hopf 分岔后作极限环运动, 并经倍周期分岔进入混沌运动。混沌出现是由于 2 个模态间能量的强烈交换。理论结果和实验结果基本吻合, 该一致性表明了所建扬声器非线性薄壳模型的正确性。

PACS 数: 43.38, 43.25, 43.40

Subharmonics and chaos in loudspeakers with internal resonance

ZHANG Zhiliang LIU Shiqing LI Xiaojun

(Department of Physics, Zhejiang Normal University Zhejiang 321004)

Received Sept. 3, 2010

Revised Apr. 13, 2011

Abstract The Subharmonics and chaos in a loudspeaker shell are investigated when the axisymmetric mode is excited resonantly by the driven force, and the internal resonance of 2:1 exists between the axisymmetric mode and the asymmetric mode. The method of multiple scales is used to obtain the first-order approximations to the nonlinear modal equations, then to analyze their stabilities, and furthermore to determine the bifurcation sets on the driving frequency and force plane. The formula of the threshold voltage of the subharmonics is given in the case considered, which is lower than the one in the case without internal resonance. Besides the presence of the 1/2 subharmonics of the asymmetric mode, the amplitudes of the two modes undergo Hopf bifurcation to limit cycle motions, and then undergo period-doubling bifurcations to chaos. The occurrence of the chaos is due to the strong energy interchange between the two modes. The experimental results agree with the theoretical ones. This agreement verifies the correctness in modeling the nonlinearity of the loudspeaker shell.

引言

文献 1 和文献 2 指出扬声器辐射体薄壳的分谐波产生机制为驱动力直接激励的轴对称振动参数激励了非轴对称模态, 并研究了驱动频率低于轴对称模态最低固有频率情形下的扬声器分谐波^[1]。文献 2 给出了轴对称模态和非轴对称模态处于 2:1 内共振(即二者固有频率之比约为 2:1)情形下的非线性模态

方程(方程 (37))。Nayfeh 等在研究船的纵向摇动模式与横向摇动模式的耦合运动^[3]、横向激励的柱壳非线性振动^[4]、Bajaj 等^[5-6]在研究耦合摆振动中得到了类似方程, 发现不仅有 1/2 分谐波, 而且在适当的参数范围内可出现混沌现象^[5]。魏荣爵院士等^[7-9]首次在扬声器声信号中发现了伴随着分谐波的混沌现象, 其频率在中频范围。文献 10 则在扬声器振动信号中观测到了中频范围的分谐波和复杂非线性振动现象。另外, 在扬声器异音检测中, 发现在振膜较

* 国家自然科学基金资助项目 (11174255, 11074222)

浅且单端支撑的小型扬声器中容易出现难于检测的异音, 其产生机制不明。2008 年, Reiss 等^[1]发现了低音扬声器在其基本共振频率附近的分谐波和混沌现象, 该文作者指出用考虑非线性回复力的广义 Duffing 方程不能解释实验现象, 因而有必要建立更精致的扬声器非线性模型。扬声器的上述分谐波以及与之伴随的复杂非线性现象的产生机制至今没有揭示。

本文首先采用摄动法和数值方法理论分析扬声器轴对称模态与非轴对称模态存在 2:1 内共振时的分谐波及混沌现象, 然后进行了实验验证。该结果解释了我我国学者首次发现的扬声器中频混沌现象。

1 摄动解和稳定性分析

文献 2 给出的轴对称模态处于共振且轴对称模态固有频率约 2 倍于非轴对称固有频率情形下的非线性模态方程为:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\hat{\mu}_0\dot{x} + \hat{\Omega}_0^2x + \hat{b}_1x^2 + \hat{b}_2z^2 &= \hat{F}_a \cos(\Omega\tau), \\ \ddot{z} + 2\hat{\mu}_n\dot{z} + \hat{\Omega}_n^2z + \hat{b}_5xz &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

式中, x 和 z 分别为轴对称模态和非轴对称模态的坐标。本文选用扬声器特征频率 ω_{tb} 对时间 t 和角频率 ω 无量纲化, ω_{tb} 可认为是扬声器作分割振动的起始频率^[12], 其值略小于轴对称模态的最低固有频率。为使以下公式简洁, 如下引入新的系数:

$$\hat{b}_2 = -4\Omega_0\hat{\Lambda}_0, \quad \hat{b}_5 = -4\Omega_n\hat{\Lambda}_n, \quad \hat{F}_a = 2\Omega_0\hat{F}. \quad (2)$$

对现在考虑的情形, 可设:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_0 &= \varepsilon\Lambda_0, \quad \hat{\Lambda}_n = \varepsilon\Lambda_n, \quad \hat{F} = \varepsilon F, \\ \hat{\mu}_i &= \varepsilon\mu_i \approx \varepsilon\delta\Omega_i/2, \quad \Omega = \Omega_0 + \varepsilon\sigma_0, \\ \Omega_0 &= 2\Omega_n + \varepsilon\sigma_n, \quad \Omega/2 = \Omega_n + \varepsilon\sigma, \\ x &= x_0 + \varepsilon x_1 + \dots, \quad z = z_0 + \varepsilon z_1 + \dots, \\ \tau_0 &= \tau, \quad \tau_1 = \varepsilon\tau, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

式中, ε 为摄动小量, σ_0 为外失谐参数, σ_n 为内失谐参数, $\sigma = (\sigma_0 + \sigma_n)/2$ 为 Ω_n 相对于 $\Omega/2$ 的失谐参数。由多尺度法解得^[3-4]:

$$\begin{aligned} x &= a_0 \cos(\omega t - \theta_1), \\ z &= a_n \cos(\omega t/2 - \theta_2), \end{aligned} \quad (4)$$

式中, a_0, a_n, θ_1 和 θ_2 满足:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= F \sin \theta_1 - \mu_0 a_0 - \Lambda_0 a_n^2 \sin \theta, \\ a_0 \dot{\theta}_1 &= a_0 \sigma_0 + F \cos \theta_1 + \Lambda_0 a_n^2 \cos \theta, \\ \dot{a}_n &= a_n (-\mu_n + \Lambda_n a_0 \sin \theta), \\ a_n \dot{\theta}_2 &= a_n (\sigma + \Lambda_n a_0 \cos \theta), \end{aligned} \quad (5)$$

式中, 点代表对 τ_1 的偏导, $\theta = 2\theta_2 - \theta_1$ 。当 a_0, a_n, θ_1 和 θ_2 为常数时, 可得稳态解。线性稳态解为^[4]:

$$a_{01} = F/(\mu_0^2 + \sigma_0^2)^{1/2}, \quad a_{n1} = 0. \quad (6)$$

非线性稳态解为^[4]:

$$\begin{aligned} a_{02} &= \Lambda_n^{-1}[\mu_n^2 + \sigma^2]^{1/2}, \\ a_{n2,3}^2 &= (\Lambda_0 \Lambda_n)^{-1}[\Gamma_1 \pm (F^2 \Lambda_n^2 - \Gamma_2^2)^{1/2}], \end{aligned} \quad (7)$$

式中,

$$\Gamma_1 = \sigma_0 \sigma - \mu_0 \mu_n, \quad \Gamma_2 = \sigma_0 \mu_n + \sigma \mu_0. \quad (8)$$

式 (6) 表明, 线性时非轴对称模态只有零解, 不出现分谐波。式 (7) 表明, 直接激励的轴对称模态非线性振幅与激励力无关, 能量传递给了非轴对称模态, 这就是由 Nayfeh 首先揭示的饱和现象^[3]。

分析可知, 非线性解 (7) 中取正号的非轴对称模态解 a_{n2} 的存在区域为:

$$\begin{aligned} \Lambda_n F &> |\Gamma_2|, \quad (\Gamma_1 > 0), \\ \Lambda_n F &> (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)^{1/2}, \quad (\Gamma_1 < 0), \end{aligned} \quad (9)$$

取负号解 a_{n3} 的存在区域为:

$$\Gamma_1 > 0, \quad |\Gamma_2| < \Lambda_n F < (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)^{1/2}. \quad (10)$$

为方便分析稳态解的稳定性, 令

$$\begin{aligned} c_1 &= a_0 \cos \theta_1, \quad d_1 = a_0 \sin \theta_1, \\ c_2 &= a_n \cos \theta_2, \quad d_2 = a_n \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (11)$$

上式代入方程 (5), 得^[4]:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 + \sigma_0 d_1 + \mu_0 c_1 + 2\Lambda_0 c_2 d_2 &= 0, \\ \dot{d}_1 - \sigma_0 c_1 + \mu_0 d_1 - \Lambda_0 (c_2^2 - d_2^2) &= F, \\ \dot{c}_2 + \sigma d_2 + \mu_n c_2 - \Lambda_n (c_1 d_2 - d_1 c_2) &= 0, \\ \dot{d}_2 - \sigma c_2 + \mu_n d_2 - \Lambda_n (c_1 c_2 + d_1 d_2) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

稳态解的稳定性由上述方程的 Jacobian 矩阵的特征方程决定, 即^[4]:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu_0 & \sigma_0 & 2\Lambda_0 d_2 & 2\Lambda_0 c_2 \\ -\sigma_0 & \lambda + \mu_0 & -2\Lambda_0 c_2 & 2\Lambda_0 d_2 \\ -\Lambda_n d_2 & \Lambda_n c_2 & \lambda + \mu_n + \Lambda_n d_1 & \sigma - \Lambda_n c_1 \\ -\Lambda_n c_2 & -\Lambda_n d_2 & -\sigma - \Lambda_n c_1 & \lambda + \mu_n - \Lambda_n d_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (13)$$

当上述方程的特征根 λ 的实部均为负时, 解稳定。

对线性解 (6), 在式 (13) 中令 $c_2 = d_2 = 0$, 并考虑到 $a_0^2 = c_1^2 + d_1^2$, 得到 4 个特征根^[4]:

$$\lambda = -\mu_0 \pm i\sigma_0, \quad -\mu_n \pm (\Lambda_n^2 a_{01}^2 - \sigma^2)^{1/2}. \quad (14)$$

故当且仅当^[4]

$$\Lambda_n^2 a_{01}^2 < \mu_n^2 + \sigma^2 \quad (15)$$

线性解稳定。对照解 (7) 中轴对称模态的非线性解,

上述条件表明当轴对称模式的线性振幅小于非线性振幅时, 线性解是稳定的。利用解 (6) 将上述条件改用驱动力表示:

$$A_n F < \{(\mu_0^2 + \sigma_0^2)[\mu_n^2 + \sigma_n^2]\}^{1/2} \equiv (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)^{1/2}. \quad (16)$$

对非线性解 (7), 利用由式 (11) 得到的关系 $a_0^2 = c_1^2 + d_1^2$ 和 $a_n^2 = c_2^2 + d_2^2$, 特征方程 (13) 成为:

$$\begin{aligned} &\lambda^4 + 2(\mu_0 + \mu_n)\lambda^3 + (\mu_0^2 + 4\mu_0\mu_n + \sigma_0^2 + 4r_n^2)\lambda^2 + \\ &[2\mu_n(\mu_0^2 + \sigma_0^2) + 4(\mu_0 + \mu_n)r_n^2]\lambda + 4r_n^2(r_n^2 - \Gamma_1) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

式中,

$$-\sqrt{\sigma_n^2 - 8\mu_0^2 - 16\mu_0\mu_n} - \sigma_n < 4\sigma_0 < \sqrt{\sigma_n^2 - 8\mu_0^2 - 16\mu_0\mu_n} - \sigma_n \quad (21)$$

时, 有:

$$2\sigma_0^2 + \sigma_n\sigma_0 + \mu_0^2 + 2\mu_0\mu_n < 0. \quad (22)$$

此时随着驱动力增大, a_{n2} 增大, 从而 r_n^2 增至足够大时, 条件 (20) 将不满足。令

$$\Gamma_3 = \frac{\mu_0\mu_n(\mu_0^2 + \sigma_0^2)[(\mu_0 + 2\mu_n)^2 + \sigma_0^2]}{2(\mu_0 + \mu_n)^2(2\sigma_0^2 + \sigma_n\sigma_0 + \mu_0^2 + 2\mu_0\mu_n)}, \quad (23)$$

则上述 r_n^2 足够大的条件可表为:

$$r_n^2 > -\Gamma_3, \quad (\Gamma_3 > 0), \quad (24)$$

利用式 (18) 将上式的非线性解不稳定区域进一步用驱动力表示为:

$$A_n F > [(\Gamma_1 + \Gamma_3)^2 + \Gamma_2^2]^{1/2}, \quad (\Gamma_3 > 0). \quad (25)$$

由式 (21) 可见, 要出现不稳定的非线性解, 内失谐需满足:

$$|\sigma_n| > \sqrt{8\mu_0^2 + 16\mu_0\mu_n} \approx 8\mu_n, \quad (26)$$

式中的约等号利用了近似 $\mu_0 \approx 2\mu_n$ 。该式表明, 仅当内失谐 $|\sigma_n|$ 不太小时, 才会出现非线性解不稳定现象。以下将看到, 在式 (25) 规定的区域中, 不存在稳定的周期解, 而出现复杂的非线性现象。

2 参数确定

实验扬声器的母线为圆弧形, 其形状和参数见图 1 和表 1, 表 1 中杨氏模量值由测得的位移特征频率确定^[14], 损耗因子和泊松比取值参考了文献 15。该扬声器辐射体薄壳的轴对称模式最低固有频率据

$$r_n^2 = A_0 A_n a_{n2,3}^2 = \Gamma_1 \pm (F^2 \Lambda_n^2 - \Gamma_2^2)^{1/2}. \quad (18)$$

据 Hurwitz 定理^[13], 方程 (17) 没有正实部特征根的充分必要条件为:

$$r_n^2 - \Gamma_1 > 0 \quad (19)$$

和

$$\begin{aligned} &2(\mu_0 + \mu_n)^2(2\sigma_0^2 + \sigma_n\sigma_0 + \mu_0^2 + 2\mu_0\mu_n)r_n^2 + \\ &\mu_0\mu_n(\sigma_0^2 + \mu_0^2)[\sigma_0^2 + (\mu_0 + 2\mu_n)^2] > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

式 (19) 表明式 (18) 和式 (7) 中的非线性解 a_{n2} 稳定, a_{n3} 不稳定。分析条件 (20) 发现当 $\sigma_0\sigma_n > 0$ 时, 该条件恒满足; 仅当外失谐位于

文献 2 的有限元法算得为 2615 Hz, 其用于无量纲化的特征频率 $\omega_{tb}/(2\pi)$ 为 2063 Hz。周向波数 $n = 6$ 的非轴对称模式的第二个固有频率为 1157 Hz, 该模式具有较大的内失谐参数 σ_n 和非线性系数 Λ_n , 可解释实验中观测到的复杂非线性现象。该模式和轴对称模式构成的耦合非线性系统的参数列于表 2, 表中最后 1 列为单位驱动电压产生的无量纲驱动力 \hat{F} 。

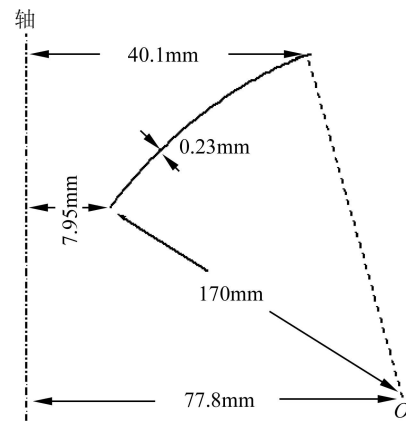


图 1 实验扬声器辐射体薄壳的几何参数

表 1 实验扬声器辐射体薄壳的材料和电磁参数

材料参数	杨氏模量	密度	损耗因子	泊松比
	$3.18 \times 10^9 \text{ N/m}^2$	578 kg/m^3	0.04	0.3
电磁参数	音圈电阻	音圈电感	Bl 乘积	音圈质量
	$8.0 \ \Omega$	0.2 mH	2.0 N/A	0.33 g

表 2 轴对称模式和非轴对称模式 ($n = 6$) 耦合系统参数

Ω_0	Ω_n	$\varepsilon\sigma_n$	$\hat{\Lambda}_0$	$\hat{\Lambda}_n$	$\hat{F}/U \text{ (V}^{-1}\text{)}$
1.27	0.561	0.146	0.0636	0.290	0.00504

3 理论和实验结果

由式 (9)、式 (10)、式 (16) 和式 (25) 可知，下述 $\sigma_0 - F$ 平面的 3 条特征曲线决定了特征：

$$\begin{aligned} L_1 : F &= A_6^{-1} |\Gamma_2|, \\ L_2 : F &= A_6^{-1} (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)^{1/2}, \\ L_3 : F &= A_6^{-1} [(\Gamma_1 + \Gamma_3)^2 + \Gamma_2^2]^{1/2} \quad (\Gamma_3 < 0). \end{aligned} \tag{27}$$

图 2 示出了 3 条曲线的计算结果，它将非线性解分成 3 个区域。式 (8) 表明 L_1 为直线。 L_2 和 L_1 相切于 $\Gamma_1 = 0, 2$ ，切点间 $\Gamma_1 < 0$ 。由于曲线 L_3 的条件为 $\Gamma_3 < 0$ ，即条件 (21)，此时必有 $\Gamma_1 < 0$ ，因此 I 区必在 II 区中。需特别指出，可以证明特征方程 (17) 在曲线 L_3 上含有 1 对纯虚数共轭复根，因而方程 (5) 此时出现 Hopf 分岔^[13]， L_3 为 Hopf 分岔集，在 L_3 以上出现振幅的极限环（周期解）^[13]，从而出现幅度周期性调制的非周期响应。区域 I 中不存在稳定的周期解。区域 II 中，线性解不稳定，非线性解 a_{02} 和 a_{n2} 稳定。区域 III 中含有稳定的线性解、非线性解 a_{02} 和 a_{n2} ，以及不稳定的非线性解 a_{n3} ，该区因而为跳变和滞后区。

实验采用光学刀片法非接触测试扬声器辐射体薄壳的振动位移技术^[14]，当扬声器振动时，光电管接收到的光通量被垂直粘贴在扬声器辐射体薄壳上的振动调制片调制，由此将振动信号转化为电信号。实验测得结果示于图 3，与理论分析结果图 2 基本吻

合。主要差别在于实验结果图 3 中的 I 区内出现了 II 区窗，以及左侧不出现明显的跳变滞后区。原因可能是扬声器辐射体薄壳含有多个固有频率约为 1/2 轴对称模态固有频率的非轴对称模态，以及现在的方程仅考虑了平方非线性，且摄动解仅为首次近似解。

由解 (6) 和 (7) 得到的各种典型的驱动力响应和频率响应曲线示于图 4(参见图 2)。图 4(a) 中在

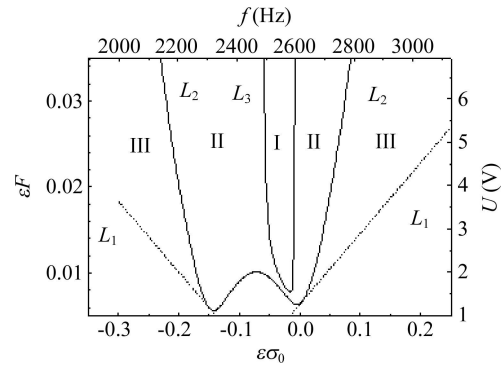


图 2 解的特征区域：I 区，无稳定周期解；II 区，稳定非线性解和不稳定线性解；III 区，多值解区（跳变滞后区）

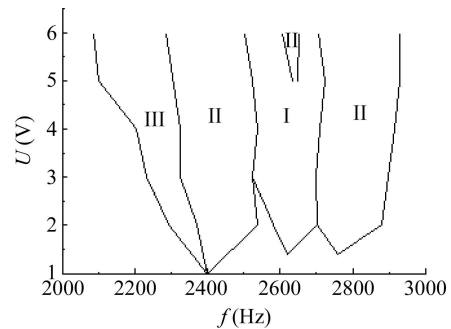


图 3 实测的解的特征区域：I 区，无稳定周期解；II 区，稳定非线性解和不稳定线性解；III 区，多值解区（跳变滞后区）

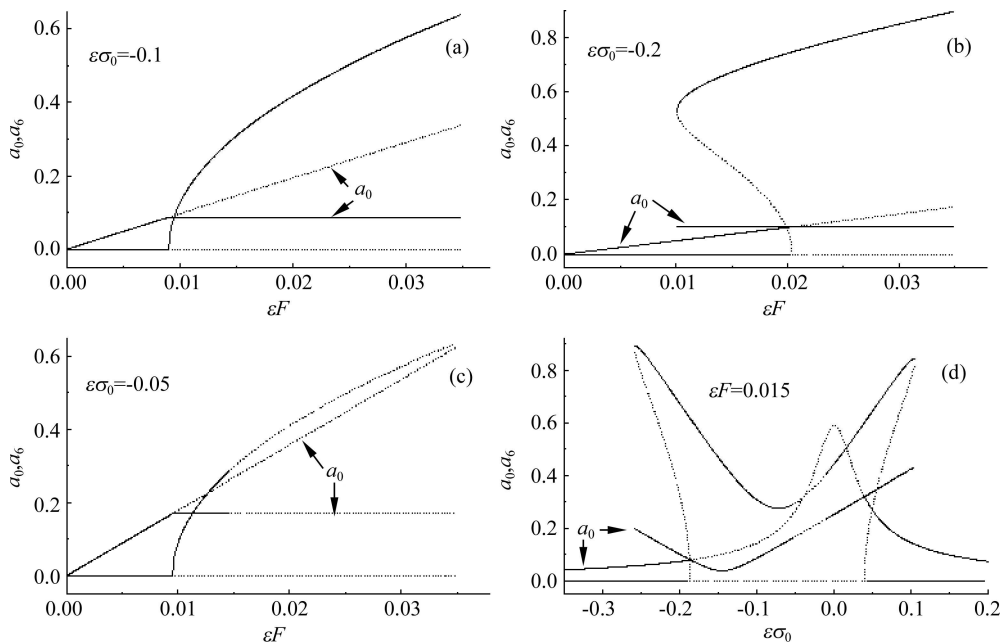


图 4 驱动力响应 ((a), (b), (c)) 和频率响应 ((d))：实线，稳定解；点线，不稳定解

$\varepsilon F = 0.00903$ 处进入 II 区，线性解变成不稳定解，而非线性解成为稳定解，直接激励的轴对称模式的幅值保持恒定 (饱和)，能量传递给非轴对称模式，且其振幅逐渐变得远大于轴对称模式振幅。图 4(b) 中在 $0.0101 < \varepsilon F < 0.204$ 区间 (III 区) 出现多值解，因而在驱动力 (或频率) 增大和减小过程中将出现跳变现象。图 4(c) 中起初阶段与图 4(a) 图类似，但在 $\varepsilon F = 0.0146$ 处经 Hopf 分岔进入 I 区。图 4(d) 中频率增加时在 $\varepsilon\sigma_0 = -0.186$ 处进入 II 区，伴随着非轴对称模式的跳变。在 $\varepsilon\sigma_0 = -0.0507$ 经 Hopf 分岔进入 I 区，在 I 区 ($-0.0507 < \varepsilon\sigma_0 < -0.0108$) 没有稳定解。在 $\varepsilon\sigma_0 = 0.0411$ 进入 III 区，随后在 $\varepsilon\sigma_0 = 0.108$ 经切分岔跳变到线性解。频率降低时过程类似。

对图 4(d) 中无稳定周期解的 I 区所作的数值计算结果示于图 5。该结果采用变步长的 4 阶 Runge-Kutta 方法对方程 (5) 直接积分得到。结果表明，幅度响应或为极限环或为混沌，随着外失谐 $|\varepsilon\sigma_0|$ 的减小，经过一系列的连续倍周期分岔进入混沌。图中

FFT 的结果清楚表明了周期加倍和混沌时的广谱特征。在不同的驱动力下，改变外失谐参数，结果类似。或者如图 4(c)，保持外失谐参数不变，增大驱动力，也出现类似结果。

实验结果证实了上述理论结果。实验测得的 II 区中的典型振动位移和频谱示于图 6。可以看到 1/2 分谐波的振幅确实远大于激励频率的振幅，图中前者比后者高出约 28 dB，以至于振动图呈现出形状良好的分谐波的正弦图形。文中给出的振动图均在紧靠扬声器辐射体薄壳的外边缘处测得。

I 区中幅度经 Hopf 分岔产生极限环并经一系列的倍周期分岔进入混沌的实验现象示于图 7 - 图 9，图 7 为 P_1 周期解，图 8 为 P_2 周期解，图 9 为混沌解。幅度的极限环对应着振动的幅度调制响应，由于调制周期加倍，图 8 比图 7 中包含了更多的振动周期。由于调制频率远低于振动频率，出现了典型的“拍”，实验中听到了明显的时强时弱的声音。出现混沌后则非常刺耳。

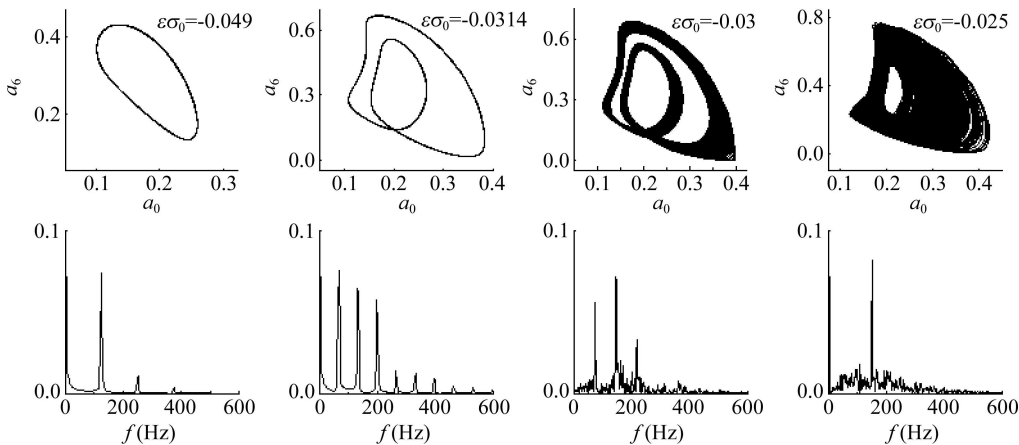


图 5 无稳定周期解的数值解，驱动力 $\varepsilon F = 0.015$ ：上图为振幅 $a_0 - a_6$ 平面的相轨迹图，下图为对应的 a_6 的 FFT 图

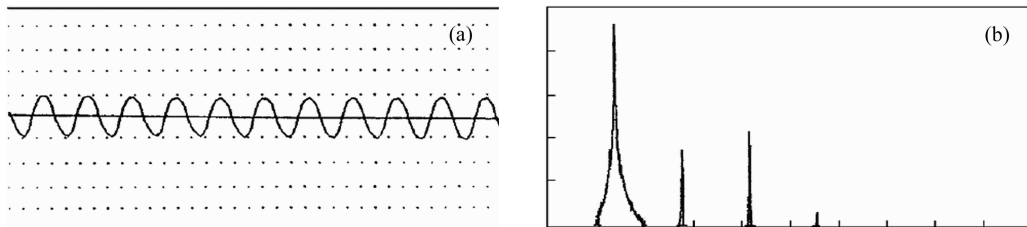


图 6 驱动频率 2810 Hz，驱动电压 4.5 V 时测得的 (a) 振动图 (0.237 ms/div)，(b) 频谱图 (1010 Hz/div，纵坐标 10 dB/div)

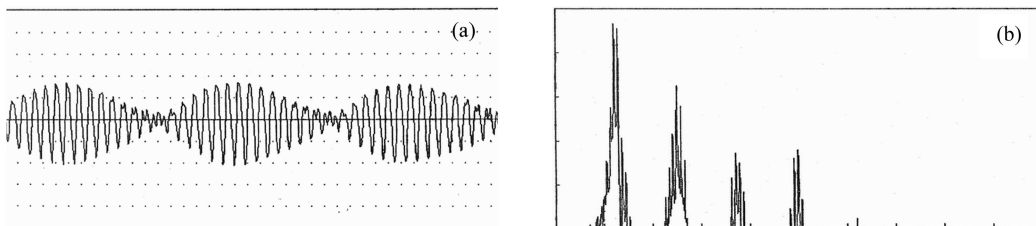


图 7 激励频率 2525 Hz，驱动电压 4.5 V 时测得的 (a) 振动图 (0.915 ms/div)，(b) 频谱图 (1010 Hz/div，纵坐标 10 dB/div)

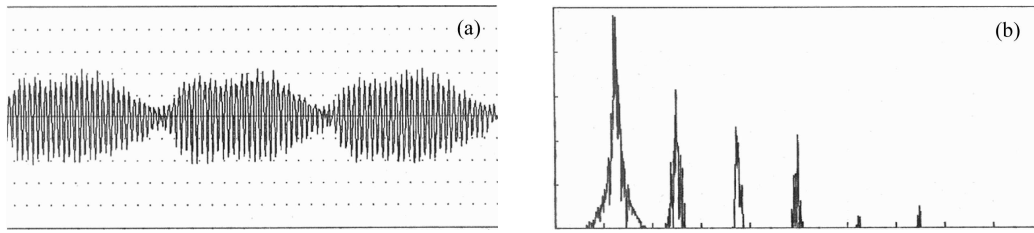


图 8 激励频率 2575 Hz, 驱动电压 4.5 V 时测得的 (a) 振动图 (1.873 ms/div), (b) 频谱图 (1010 Hz/div, 纵坐标 10 dB/div)

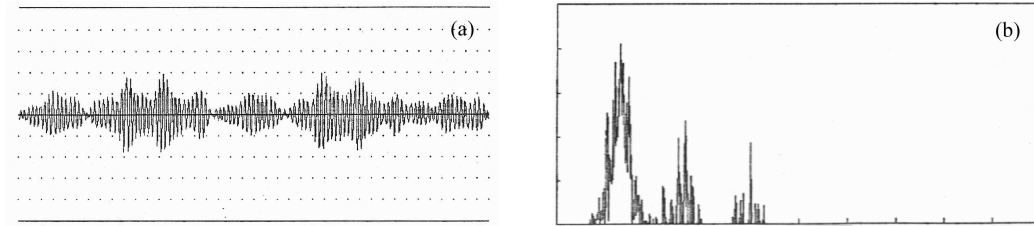


图 9 激励频率 2693 Hz, 驱动电压 4.5 V 时测得的 (a) 振动图 (2.099 ms/div), (b) 频谱图 (1010 Hz/div, 纵坐标 10 dB/div)

4 阈值

图 2 中曲线 L_2 的最低点对应着产生分谐波的驱动力阈值。对该曲线方程 (16) 的极值分析表明, 在 $\mu_0 \approx 2\mu_n$ 的近似条件下, 临界激励力幅可以简明地表示为:

$$F_0 = \begin{cases} \Lambda_n^{-1} \mu_n |\sigma_n|, & (|\sigma_n| > 4\mu_n), \\ \Lambda_n^{-1} (2\mu_n^2 + \sigma_n^2/8), & (|\sigma_n| < 4\mu_n), \end{cases} \quad (28)$$

极值位置分别为 $\sigma_0 = (-\sigma_n \pm \sqrt{\sigma_n^2 - 16\mu_n^2})/2$ 和 $\sigma_0 = -\sigma_n/2$ 。当内失谐为零时, 可出现最低的驱动力阈值 ($\sigma_0 = \sigma_n = 0, F_0 = 2\mu_n^2/\Lambda_n$)。利用式 (2) 和式 (3), 将驱动力阈值转化为电压阈值, 得:

$$U_0 = \frac{2\sqrt{2}Rm_0m_n\omega_0\omega_n^3}{Blu_{ax}P_{111}(y_n, \bar{y}_n, y_0)} \times \begin{cases} \hat{\delta}|\omega_0/\omega_n - 2|, & (|\omega_0/\omega_n - 2| > 2\hat{\delta}), \\ \hat{\delta}^2 + (\omega_0/\omega_n - 2)^2/4, & (|\omega_0/\omega_n - 2| < 2\hat{\delta}), \end{cases} \quad (29)$$

式中, B 为磁感应强度, l 为音圈导线长度, R 为音圈电阻, u_{ax} 为归一化的轴对称模态的小端处轴向位移, 其值与模态形状有关, m_0 和 m_n 分别为轴对称模态和非轴对称模态质量, 其值正比于密度和厚度, 并与模态形状有关, $P_{111}(y_n, \bar{y}_n, y_0)$ 为非线性引起的立方应变能, 其值正比于杨氏模量和厚度^[2], 并与模态形状有关, $\hat{\delta}$ 为损耗因子, ω_0 和 ω_n 分别为轴对称模态和非轴对称模态的固有频率, 其值正比于杨氏模量和密度比值的平方根, $|\omega_0/\omega_n - 2|$ 代表内失谐程度, 其值与杨氏模量和密度无关, 仅与振膜几何形状有关。

振膜力学参数对阈值电压的影响相对简单。改变杨氏模量和密度不影响模态形状, 因此 u_{ax} 不变, 且有 $m_0m_n\omega_0\omega_n^3/P_{111}(y_n, \bar{y}_n, y_0)$ 正比于杨氏模量, 从而阈值电压与杨氏模量成正比, 与密度无关。增大阻尼显然可提高阈值电压。

振膜几何参数对上式中诸量的影响关系较为复杂, 它不仅影响固有频率, 也影响模态形状, 而且对

轴对称模态和非轴对称模态的影响不同。因此必须采用有限元方法分析振膜几何形状对阈值电压的影响, 该内容将另文深入分析。本文仅就均匀振膜厚度情形, 粗略讨论厚度对阈值电压的影响。改变厚度时, 在模态形状不变的近似假设下, 有 $m_0m_n/P_{111}(y_n, \bar{y}_n, y_0)$ 正比于厚度。以目前研究的扬声器为例(下同), 厚度增加一倍时, 算得该组合量增加 1.13 倍, 近似符合正比关系。同时, 厚度增加意味着弯曲劲度增大, 因而 ω_0 和 ω_n 随厚度增加而增高, 但由于非轴对称模态在周向也存在弯曲变形, ω_n 的厚度效应较 ω_0 更明显。厚度增加一倍时, 轴对称模态的固有频率从 2615 Hz 增加到 2881 Hz, 而所研究的非轴对称模态的固有频率从 1157 Hz 增加到 1830 Hz。 u_{ax} 也随厚度增加而增大, 这是因为开始几个轴对称模态的弯曲振动局限于扬声器振膜靠近大端的区域, 其余区域仍为纵波振动^[16-17], 厚度增加所导致的弯曲劲度增大使弯曲振动振幅减小, 使得小端的振幅归一化时增大了。厚度增加一倍时, 算

得 u_{ax} 增加 0.56 倍。综合以上, 厚度增加一倍时, $m_0 m_n \omega_0 \omega_n^3 / u_{ax} / P_{111}(y_n, \bar{y}_n, y_0)$ 的值增加 4.95 倍, 说明增加厚度的效果较好。另外, ω_0 和 ω_n 厚度效应的不一致导致内失谐也会随厚度变化而改变, 本例中, 1830 Hz 的非轴对称模态与 2881 Hz 的轴对称模态的失谐已大到足以使分谐波不产生(见图 2 中的 L_2 曲线)。当然不能排除此时另 1 个非轴对称模态和轴对称模态频率匹配而出现分谐波。增加厚度的作用在于在内失谐相同的条件下可有效提高阈值电压, 并增大非轴对称模态的频率间隔, 从而减少频率匹配的机会。消除扬声器半音实例中, “贴膏药”^[1] 效果不仅增加了扬声器振膜厚度, 也改变了内失谐。

据表 2 数据, 算得阈值电压为 1.12 V, 明显低于文献 1 中无内共振情形时的阈值电压, 这是由于目前轴对称模态也处于共振状态。

5 结论

当轴对称模态与非轴对称模态存在 2:1 内共振时, 由于轴对称模态也处于共振状态, 内共振下的分谐波阈值电压低于无内共振情形时的阈值电压。在分谐波出现区域, 当内失谐满足 $|\sigma_n| > 8\mu_n$ 的条件下还可出现混沌现象。增大扬声器振膜的阻尼、厚度、杨氏模量和内失谐, 可增大分谐波阈值电压, 振膜几何形状(包括母线展开函数和厚度分布等)对阈值电压的影响将采用有限元方法进行深入研究。

有内共振时的扬声器分谐波和混沌现象发生于扬声器辐射体薄壳的轴对称模态固有频率处, 因而出现于中频。本文结果解释了我国学者首次发现的扬声器中频混沌现象。Reiss 等^[11] 发现的低音扬声器低频分谐波和混沌现象或许是由于不均匀磁场所导致, 其成因有待进一步研究。

本文和文献 1 的理论和实验结果的基本吻合证实了即使扬声器辐射体薄壳的材料性能、几何参数和驱动力是轴对称且均匀的, 非轴对称模态仍能在合适条件下由非线性参数激励激发, 从而出现分谐波和混沌现象。还证实了扬声器辐射体薄壳的非线性机制为几何非线性, 即应变和位移的非线性, 而非材料非线性。

参 考 文 献

- 1 张志良, 刘世清, 曾宪阳. 无内共振时的扬声器分谐波. 声学学报, 2012; **37**(3): 279—285
- 2 张志良, 杨虹, 刘世清. 扬声器旋转薄壳的非线性振动方程. 声学学报, 2012; **37**(2): 123—131
- 3 Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear oscillations. New York: John Wiley & Sons, 1979: 343—348
- 4 Nayfeh A H. Nonlinear oscillation of circular cylindrical shells. *Int. J. Solids Structures*, 1987; **23**(12): 1625—1638
- 5 Bajaj A K, Chang S I, Johnson J M. Amplitude modulated dynamics of a resonantly excited autoparametric two degree-of-freedom system. *Nonlinear Dynamics*, 1994; **5**: 433—457
- 6 Vyas A, Bajaj A K. Dynamics of autoparametric vibration absorbers using multiple pendulums. *J. Sound Vib.*, 2001; **246**(1): 115—135
- 7 Wei R J, Tao Q T. Bifurcation and chaos of direct radiation loudspeaker. *Chinese Phys. Lett.*, 1986; **3**(10): 469—472
- 8 Miao G Q, Ni W S, Tao Q T, Zhang Z L, Wei R J. Bifurcation, chaos and hysteresis in electrodynamic cone loudspeaker. *Chinese Phys. Lett.*, 1990; **7**(2): 68—71
- 9 Tong P Q, Miao G Q, Ni W S, Wei R J. Lyapunov exponents and general dimensions of strange attractor of electrodynamic cone loudspeaker. *Chinese Phys. Lett.*, 1991; **8**(9): 442—445
- 10 Zhang Z L, Tao Q T. Experimental study of non-linear vibrations in a loudspeaker cone. *J. Sound Vib.*, 2001; **248**(1): 1—8
- 11 Reiss J D, Djurek I, Petosic A, Djurek D. Verification of chaotic behavior in an experimental loudspeaker. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2008; **124**(4): 2031—2041
- 12 张志良. 扬声器锥壳的全频段振动通解. 声学学报, 2010; **35**(5): 554—561
- 13 周纪卿, 朱因远. 非线性振动. 西安: 西安交通大学出版社, 1998: 91—93, 350—353
- 14 Tao Q T, Zhang Z L. A new method of measuring the Young's modulus in a paper cone. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1996; **99**(4): 2183—2184
- 15 Frankort F J M. Vibration and sound radiation of loudspeaker cones. Eindhoven, Netherlands: NV Philips' Gloeilampenfabrieken, 1975. (中译本: 赵志诚, 杨良柏, 李联芳译. 扬声器锥体的振动和声辐射. 北京: 科学出版社, 1988)
- 16 张志良. 扬声器锥壳的全频段强迫振动解. 声学学报, 2010; **35**(6): 678—687
- 17 Zhang Z L, Cheng C J. Uniformly valid solutions of the coupling turning-point problem in revolution shell vibration. *SCIENCE IN CHINA (G)*, 2009; **52**(9): 1392—1403