

## 纪念魏荣爵先生诞辰 95 周年

# 非 Bragg 禁带中的缺陷态<sup>\*</sup>

王 林 陶智勇<sup>†</sup> 王新龙

(南京大学声学研究所 近代声学教育部重点实验室 南京 210093)

2010 年 12 月 13 日收到

2011 年 1 月 12 日定稿

**摘要** 通过在周期柱状声波导中引入缺陷结构, 研究了非 Bragg 禁带中的缺陷态。与传统 Bragg 禁带中的缺陷态相比, 非 Bragg 禁带中的缺陷态具有完全不同的特性, 所透射的缺陷模包含复杂的高阶横向模式, 其形成与波导中的非 Bragg 共振密切相关。数值模拟表明缺陷态的频率与引入缺陷的几何尺寸有关, 当缺陷长度变长时, 非 Bragg 缺陷态与 Bragg 缺陷态一样向低频移动。而缺陷的半径变化时, 非 Bragg 缺陷态却表现出完全不同的特性, 随缺陷半径的变大而向高频移动。非 Bragg 缺陷态的这一反常变化与其模式结构密切相关, 对非 Bragg 缺陷态的研究工作必将为声选频、滤波等器件的研制提供重要参考。

PACS 数: 43.20, 43.55

## Defect states in the non-Bragg band gaps

WANG Lin TAO Zhiyong WANG Xinlong

(Key Lab of Modern Acoustics MOE and Institute of Acoustics, Nanjing University Nanjing 210093)

Received Dec. 13, 2010

Revised Jan. 12, 2011

**Abstract** A defect state in the non-Bragg band gaps is investigated by introducing a straight tube into a cylindrical waveguide with periodic rectangular boundaries. The non-Bragg defect state, containing the more complex high-order guided wave modes, is quite different from that in the well-known Bragg gaps. The numerical simulation indicates that the frequency of the non-Bragg defect modes relies on the geometric parameters of the introduced defect. It moves to the low frequency region as the length of the introduced tube increases. But when the radius gets larger, the frequency of the non-Bragg defect mode goes to the high-frequency side. These results will contribute a lot to the development of the acoustical instruments.

## 引言

周期结构中的波动问题长期以来一直是各国研究人员关注的焦点之一<sup>[1-11]</sup>, 因为它不仅具有重要的理论价值, 而且在生产生活、工程技术中也有着广泛的应用。近年来, 研究人员围绕周期结构中经典波(电磁波和声波)的传播问题做了大量的研究工作, 而其中大部分的研究目的是设计具有特殊谱带结构的复合材料<sup>[12-14]</sup>。但是多数研究者都把目光局限在周期结构波导中的 Bragg 共振上。相关实验研究所采用的波导都是长周期波导, 在这种结构中,

Bragg 共振是影响谱带结构的主要因素, 从而忽略了远离 Bragg 共振区的其它物理现象。实际上, 如果选取适当的波导周期, 则会出现一种有别于传统意义的共振现象, 被称为非 Bragg 共振<sup>[15-16]</sup>。非 Bragg 共振与 Bragg 共振最大的区别在于, 非 Bragg 共振是不同径向模式发生的共振, 而 Bragg 共振则是相同模式之间的共振现象。非 Bragg 共振由于其丰富的物理内涵及其广泛应用前景, 正在逐渐被人们所认识, 一些关于非 Bragg 共振的研究工作也开展起来<sup>[17-21]</sup>。在周期结构中, Bragg 共振或者非 Bragg 共振都会产生所谓的谱带分裂现象, 从而产生相应的 Bragg 禁带和非 Bragg 禁带。

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目 (10604031, 11074121)

<sup>†</sup> 通讯作者: E-mail: zytao@nju.edu.cn

当声子晶体中引入缺陷, 其周期结构的完整性被破坏时, 可使声波局域化, 即在声子禁带中出现模密度较大的局域模。人们利用这一特性可以制造各种用途的声滤波器件, 带缺陷的声子晶体已经引起人们的广泛关注。Khelif 等从理论和实验上研究了带有缺陷的二维声子晶体中声波的局域化和传播现象<sup>[22]</sup>。Miyashita 等在二维声子晶体中引入缺陷模波导并实验研究了其传输谱<sup>[23]</sup>。赵言诚等研究了二维声子晶体中异质线缺陷的填充系数、旋转等因素对声波导的影响<sup>[24]</sup>。钟兰花等讨论了二维点缺陷声子晶体中缺陷填充率对能带的影响<sup>[25]</sup>。在变截面声波导方面, Munday 等在周期波导中引入缺陷并观测到了禁带中的缺陷态<sup>[26]</sup>。然而, 他们的工作都没有关注到非 Bragg 禁带的变化。事实上, 同 Bragg 禁带类似, 在加入缺陷后非 Bragg 禁带中也会出现缺陷模, 不同的是它涉及更多的径向模式, 具有更为丰富的物理内涵。

本文首先给出周期变截面声波导中波动问题的物理和数学模型, 并简单介绍非 Bragg 禁带的产生。接下来, 我们在典型的非 Bragg 禁带波导中加入缺陷结构, 通过对其传输曲线的计算, 我们发现在非 Bragg 禁带中也会出现与 Bragg 禁带情况类似的缺陷模透射现象。通过对波导中声压分布的分析, 初步了解了非 Bragg 缺陷模的特征。在第三部分中我们重点分析了波导出口端的声压分布, 进行了曲线拟合, 并讨论了缺陷模的频带随缺陷几何参数的变化。最后, 总结了本文的若干重要结果。

## 1 非 Bragg 禁带的产生

波导结构如图 1 所示, 变截面波导的平均半径和声速进行无量纲化<sup>[17]</sup>, 则管壁函数:

$$r_w = \begin{cases} 1 + \varepsilon, & l\Lambda < z < (l + 0.5)\Lambda, \\ 1 - \varepsilon, & (l + 0.5)\Lambda < z < (l + 1)\Lambda, \end{cases} \quad (1)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, 10.$$

其中  $\Lambda$  是无量纲化周期。周期波导中的单频波动声压  $pe^{-i\omega t}$  可由如下亥姆霍兹方程描述

$$\nabla^2 p + \omega^2 p = 0, \quad (2)$$

声压在管壁上满足刚性边界条件。

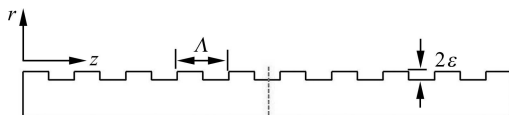


图 1 波导沿半径方向的截面图 (周期  $\Lambda = 1$ )

根据 Floquet 理论, 周期为  $\Lambda (= 2\pi/k)$  的柱对称波导中有:

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_0(k_{r,n} r) e^{ik_{z,n} z}, \quad (3)$$

这里  $J_0(\cdot)$  为零阶贝塞尔函数,  $k_{r,n}$  和  $k_{z,n}$  分别为波导中径向和纵向的波数, 且有:

$$k_{z,n} = \beta + nk, \quad \left(-\frac{k}{2} \leq \beta \leq \frac{k}{2}\right), \quad (4)$$

$$\omega^2 = k_{r,n}^2 + k_{z,n}^2, \quad (5)$$

而 Bragg 和非 Bragg 共振都发生在曲线

$$l(q, n) = \sqrt{K_q^2 + (\beta + nk)^2} \quad (6)$$

的交点处<sup>[18]</sup>。这里  $K_q$  代表对应的非周期波导中的第  $q$  个横向模式 (即一阶贝塞尔函数  $J_1(\cdot)$  的第  $q$  个零点)。当

$$\beta = -\frac{k}{2}(n' + n) \left[ 1 + \frac{K_q^2 - K_{q'}^2}{(n'^2 - n^2)k^2} \right] \quad (7)$$

时, 第  $n$  个空间谐波的第  $q$  个横向模式与第  $n'$  个空间谐波的第  $q'$  个横向模式之间相干相消, 对应频率的波不能在波导中传播, 会发生强反射, 产生频域禁带。当  $q = q'$  时, 即相同的横向模式之间发生了相干相消, 导致 Bragg 禁带。反之, 就称为非 Bragg 禁带。我们取  $\Lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$  即可得到典型的非 Bragg 禁带<sup>[18]</sup>, 如图 2(b) 中虚线所示, 这里  $f = \omega/2\pi$  为入射

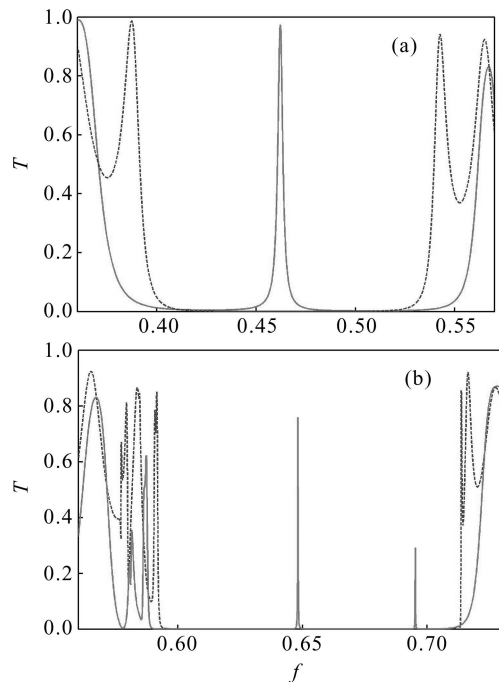


图 2  $\Lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$  时, 声波导的透射谱。虚线和实线分别代表加入缺陷前后的透射特性: (a) Bragg 禁带中的缺陷态; (b) 非 Bragg 禁带中的缺陷态

波频率,  $T = P_{\text{out}}/P_{\text{in}}$  为平均声功率透射系数,  $P_{\text{in}}$  和  $P_{\text{out}}$  分别为入射和透过的平均声功率。

## 2 禁带中的缺陷态

我们在如图 1 所示的虚线位置引入长为  $L$ , 半径为  $R$  的圆柱形波导作为缺陷。当取  $L = 0.5$ ,  $R = 0.9$  时, 在 Bragg 禁带出现了一条很窄的频率通带如图 2(a) 中实线所示。值得关注的是在非 Bragg 禁带中也出现了透射谱线, 如图 2(b) 中实线所示。引入缺陷后不仅在 Bragg 禁带中出现了缺陷模的透射 ( $f = 0.4622$ ), 而且非 Bragg 禁带中也出现了缺陷模, 这是以往研究人员没有注意到的。而且图中表明在我们选取的波导参数下, 非 Bragg 禁带中会出现两个缺陷模, 分别在频率 0.6481 和 0.6952。相比较而言, Bragg 禁带的缺陷模的透射率接近 1, 而非 Bragg 禁带中的缺陷模的透射率要小一些, 最大的透射率只有 0.8 左右, 而另一个高频的缺陷模的透射率仅在 0.5 左右。另一方面, 从透射率的曲线上看, 非 Bragg 禁带缺陷态出现的频带要交 Bragg 禁带的窄很多。由于高频的缺陷模透射率很小, 且其频带更窄, 所以本文主要研究  $f = 0.6481$  时的非 Bragg 缺陷态。

图 3 给出了  $f = 0.4622$  和  $f = 0.6481$  时有缺陷波导中的声压分布。为便于比较, 图中声压按其各自的最大值作了归一化。对比图 3(a) 和图 3(b), 不难发现, 在波导的缺陷处产生了强烈的共振, 激发了共振态, 从而在原来的禁带中产生了频率通带。从声压分

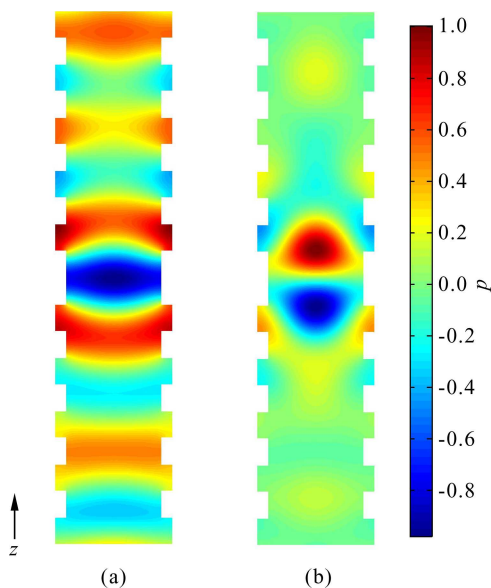


图 3 缺陷态的声压分布图

(a) 为 Bragg 禁带中的; (b) 为非 Bragg 禁带中的

布图上可以清楚地看到, 无论 Bragg 缺陷态还是非 Bragg 缺陷态, 大量的声能量都被局限在缺陷当中, 并由于强烈的共振作用又使得声波在原禁带内传播。在图 3(a)(Bragg 缺陷态) 中, 除了缺陷的位置外, 声压的径向分布基本是均匀的, 而在图 3(b) 的非 Bragg 缺陷态中, 声压的径向分布在整个波导中都有较大的变化, 预示着高阶模式在非 Bragg 缺陷态的形成中起到了不可忽视的作用。

## 3 非 Bragg 缺陷态

从声场分布来看, 非 Bragg 缺陷态具有与传统 Bragg 缺陷态完全不同的结构和特性。其形成机制与波导中的非 Bragg 共振现象密切相关。为精确了解非 Bragg 缺陷态的形成机制和特性, 我们将对非 Bragg 缺陷模的结构及其频带变化进行更深入的分析。

### 3.1 缺陷模的结构

为进一步分析非 Bragg 缺陷态的模式结构, 我们将管口处声压的径向分布取出来进行了导波模式分析。图 4 中的圆圈和圆点分别是 Bragg 缺陷态 ( $f = 0.4622$ ) 和非 Bragg 缺陷态 ( $f = 0.6481$ ) 管口声压随波导半径的变化。相比较而言, Bragg 缺陷态的声压随半径的变化不大, 而非 Bragg 缺陷态的声压变化明显与高阶导波模式有关。我们取如下模型对声压分布做拟合, 虚线和实线分别为 Bragg 和非 Bragg 缺陷态的声压分布拟合曲线。

$$p = \sum_{n=0}^3 a_n J_0(K_n r), \quad (8)$$

这里  $n$  取 0, 1, 2, 3 分别代表基模、一阶模、二阶模和三阶模。省掉了更高阶的径向模式是因为在我们所考查的频率下, 其影响可忽略。对 Bragg 缺陷态而言, 其声压分布拟合系数为  $a_0 = 0.9436$ ,  $a_1 = -0.2325$ ,

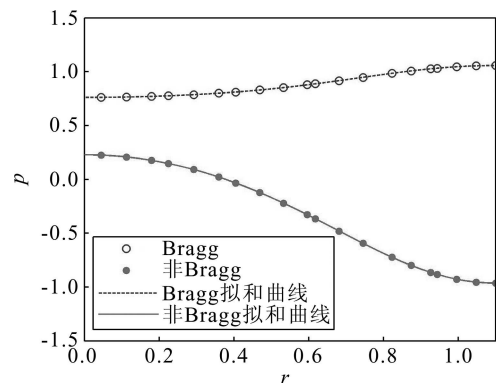


图 4 管口处缺陷态声压随半径的变化及其拟合曲线

(圆圈和圆点分别为 Bragg 和非 Bragg 禁带内缺陷态的声压; 虚线和实线分别为它们的拟合曲线。)

$a_2 = 0.0591$  和  $a_3 = -0.0089$ , 拟合的均方根误差为  $\sigma = 0.0004$ 。由此可见, Bragg 禁带缺陷模的主要成分为基模, 其次为一阶模式。更高阶模式的影响可以忽略。而且与基模相比, 一阶模的比重很小。对非 Bragg 缺陷态而言, 其声压分布拟合系数分别为  $a_0 = -0.5495$ ,  $a_1 = 0.9072$ ,  $a_2 = -0.1457$  和  $a_3 = 0.0168$ , 拟合的均方根误差为  $\sigma = 0.0006$ 。非 Bragg 禁带缺陷模的主要成分为基模和一阶模式, 其它高阶模的影响不大。这与非 Bragg 禁带是由两个不同径向模式之间共振产生的<sup>[19]</sup> 有密切关系。对管口导波模式的分析也充分说明了与传统 Bragg 缺陷态不同, 非 Bragg 缺陷态具有更加丰富的物理内容, 它的产生与高阶径向模式有关。

### 3.2 缺陷模的频移

为了进一步了解非 Bragg 缺陷态的性质, 我们通过调整缺陷结构的几何参数来观察缺陷态的频移情况。

首先, 固定圆柱缺陷的半径  $R = 0.9$ , 改变其长度  $L$ 。我们发现当缺陷长度从 0.1 变化到 1.0 时, 非 Bragg 缺陷模的频带从高频向低频移动, 其中心频率的变化如图 5 中圆点所示。当缺陷长度  $L = 0.5$ , 即周期长度之半时, 缺陷模中心频率刚好出现在整个非 Bragg 禁带的中心。缺陷长度越小, 其能够影响的声波频率越高, 因此更高频的声波局域在缺陷中, 而低频的声波由于其波长较长可以轻松绕过缺陷传播, 因此缺陷对其影响可忽略, 不会形成缺陷态。所以, 缺陷的长度变化对应了缺陷模中心频率的变化, 尺度越大的缺陷, 其缺陷模的中心频率也越低。在缺陷长度变化时, Bragg 缺陷模也有类似特性, 如图 5 中圆圈所示。

其次, 我们固定缺陷的长度  $L = 0.5$ , 使圆柱缺陷的半径  $R$  从 0.1 变化到 0.9, 非 Bragg 缺陷模的中心频率变化如图 6 中圆点所示。随着缺陷半径的增大, 缺陷模的中心频率不断向高频移动, 说明高阶模式的影响不断增加。而对于 Bragg 缺陷模而言, 由于高阶模式不占主导地位, 所以其频移仅与缺陷尺度的大小有关。其变化与图 5 中随长度的变化相近, 随尺度的增加而向低频移动 (如图 6 中圆圈所示)。Bragg 缺陷模在缺陷半径增大至 0.5 之前快速向低频移动, 是由于在小半径时, 半径的改变对声波能量透过的多少起到主要作用, 而当半径大于 0.5 时, 由于缺少高阶模的参与, 半径的变化就影响不大了。但非 Bragg 缺陷模却有着完全不同的频移特性, 这是由于在非 Bragg 缺陷模中一阶导波模式占主导地位, 半径的变化对其影响很大。随着半径的增大, 缺陷对一

阶模的截止频率降低, 即对一阶模的衰减减小。也就是说, 半径越大就能够将包含更多高阶模的声波局域到缺陷中, 而波的高阶径向模式成分越多也就说明其频率越高。因此, 半径对不包含高阶模的基模声波而言, 其影响不大; 而对于高阶模声波来说, 越大的缺陷半径其能局域的声波频率也越高。

总之, 缺陷几何参数的变化对缺陷态的影响很大, 而 Bragg 缺陷态和非 Bragg 态缺陷又有其各自的特点。对于 Bragg 缺陷模而言, 由于其结构成分的简单, 几何尺度的变化就直接影响到其局域声波的波长。尺度变大其透射谱的频带就向低频移动。然而, 非 Bragg 缺陷模的结构就要复杂得多了, 这也使得缺陷长度和半径的影响截然不同。半径不变时, 对径向导波模式的影响不变, 因此长度的增加就直接导致缺陷模的频带向低频移动。而半径的变化却直接影响到径向模式的多寡, 半径变大, 包含的径向模式成分就多, 这样其缺陷模的频率就增大。

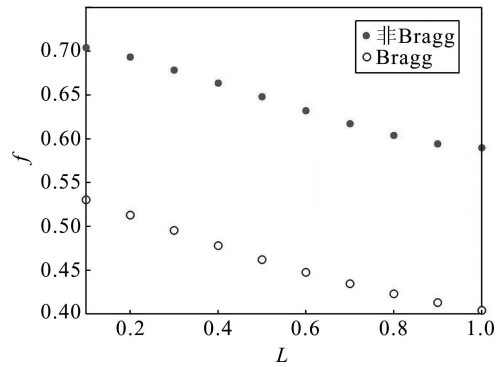


图 5 缺陷模中心频率随缺陷长度的变化 (圆点和圆圈分别代表非 Bragg 和 Bragg 缺陷模)

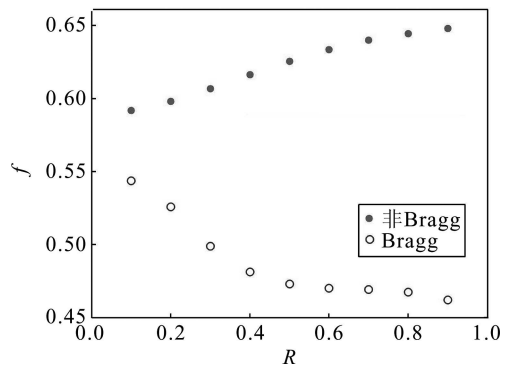


图 6 缺陷模中心频率随缺陷半径的变化 (圆点和圆圈分别代表非 Bragg 和 Bragg 缺陷模)

## 4 结论

本文设计了一种能够实现非 Bragg 缺陷态的波导结构, 分析了非 Bragg 缺陷模与传统 Bragg 缺陷模的异同, 并对非 Bragg 缺陷模的特性进行了深入

的分析。非 Bragg 缺陷态是在非 Bragg 禁带中产生的, 与非 Bragg 共振密切相关, 因此其模式结构也变得复杂, 涉及波导中的高阶横向模式。分析表明在本文设计的波导结构中, 非 Bragg 缺陷模的成分主要是波导的基模和一阶模。而同一波导中的 Bragg 缺陷的主要成分只有基模。这是非 Bragg 缺陷模区别于 Bragg 缺陷模的重要特征。在缺陷几何参数变化时, 我们重点分析了缺陷模的频带偏移。在波导纵向的变化中, 非 Bragg 缺陷模的频带偏移与 Bragg 缺陷模的一样, 随尺度变大而频率减小。但在波导横向变化时, 非 Bragg 缺陷模的频移就和 Bragg 缺陷模截然相反。这样独特的变化规律恰恰是与其复杂模式结构密切相关的, 这也是其区别于传统缺陷模的重要性质。

对非 Bragg 缺陷态的研究有重要的理论和应用价值。本文只是提供了一个实现非 Bragg 缺陷态的波导结构, 而由于非 Bragg 禁带的复杂性和多样性, 非 Bragg 缺陷态及其相关的波导结构也必将是复杂的和多样的, 其研究内容也更加丰富和诱人。另一方面, 由于非 Bragg 缺陷模的结构复杂, 变化独特, 对其的深入研究必将对选频、滤波等器件的设计和应用有着深远影响。

### 参 考 文 献

- 1 Rayleigh L. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency and on the propagation of wave through a medium endowed with a periodic structure. *Philosophical Magazine*, 1887; **XXIV**: 145—159
- 2 Elachi C. Waves in active and passive periodic structures: a review. In: Proc. IEEE, 1976; **64**: 1666—1698
- 3 Nayfeh A H. Sound waves in two-dimensional ducts with sinusoidal walls. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1974; **56**: 768—770
- 4 吴福根, 刘有延. 二维周期性复合介质中声波带隙结构及其缺陷态. *物理学报*, 2002; **51**(7): 1434—1438
- 5 谭红波, 赵洪, 徐海亭. 有限元法分析空腔周期分布粘弹性层的声特性. *声学学报*, 2003; **28**(3): 277—282
- 6 Zhang X, Liu Z. Negative refraction of acoustic waves in two-dimensional phononic crystals. *Appl. Phys. Lett.*, 2004; **85**(2): 341—343
- 7 Gorishnyy T, Ullal C K, Maldovan M, Fytas G, Thomas E L. Hypersonic Phononic Crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 2005; **94**(11): 115501
- 8 Feng L, Liu X P, Lu M H, Chen Y B, Chen Y F, Mao Y W, Zi J, Zhu Y Y, Zhu S N, Ming N B. Acoustic backward-wave negative refractions in the second band of a sonic crystal. *Phys. Rev. Lett.*, 2006; **96**(1): 014301
- 9 赵言诚, 苑立波. 二维声子晶体异质位错结的界面传导模研究. *应用声学*, 2007; **26**(4): 202—207
- 10 Farhat M, Enoch S, Guenneau S, Movchan A B. Broad-band cylindrical acoustic cloak for linear surface waves in a fluid. *Phys. Rev. Lett.*, 2008; **101**(13): 134501
- 11 徐方迁, 金步平. 声表面波在厚金属栅阵中的耦合模参数. *声学学报*, 2010; **35**(4): 441—445
- 12 Kushwaha M S, Halebi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.*, 1993; **71**(13): 2022—2025
- 13 Sigalas M M. Elastic wave band gaps and defect states in two-dimensional composites. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1997; **101**(3): 1256—1261
- 14 Richoux O, Tournat V, Van Suu T Le. Acoustic wave dispersion in a one-dimensional lattice of nonlinear resonant scatterers. *Phys. Rev. E*, 2007; **75**(2): 026615
- 15 Pogrebnnyak V A. Electromagnetic standing wave resonances in a periodically corrugated waveguide. *Phys. Rev. E*, 1998; **58**(5): 5261—5263
- 16 Pogrebnnyak V A. Non-Bragg reflections in a periodic waveguide. *Opt. Commun.*, 2004; **232**: 201—207
- 17 Tao Z Y, Xiao Y M, Wang X L. Non-Bragg resonance of standing acoustic wave in a cylindrical waveguide with sinusoidally perturbed walls. *Chin. Phys. Lett.*, 2005; **22**(2): 394—397
- 18 Tao Z Y, He W Y, Wang X L. Resonance-induced band gaps in a periodic waveguide. *J. Sound Vib.*, 2008; **313**(3—5): 830—840
- 19 Tao Z Y, He W Y, Xiao Y M, Wang X L. Wide forbidden band induced by the interference of different transverse acoustic standing-wave modes. *Appl. Phys. Lett.*, 2008; **92**(12): 121920
- 20 Xiao Y M, Tao Z Y, He W Y, Wang X L. Non-Bragg resonance of surface water waves in a trough with periodic walls. *Phys. Rev. E*, 2008; **78**(1): 016311
- 21 Tao Z Y, He W Y, Xiao Y M, Zhang W H, Wang X L. Sound transmission within the Bragg gap via the high-order modes in a waveguide with periodically corrugated walls. *J. Appl. Phys.*, 2009; **105**(12): 123515
- 22 Khelif A, Choujaa A, Djafari-Rouhani B, Wilm M, Ballandras S, Laude V. Trapping and guiding of acoustic waves by defect modes in a full-band-gap ultrasonic crystal. *Phys. Rev. B*, 2003; **68**(21): 214301
- 23 Miyashita T, Sato W, Nakaso Y, Mukuda R. Experimental studies on two-dimensional defect-mode waveguides in a sonic/phononic crystal. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 2007; **46**(7B): 4684—4687
- 24 赵言诚, 赵芳, 苑立波. 二维声子晶体异质线缺陷的声波导特性. *人工晶体学报*, 2006; **35**(6): 1190—1194
- 25 钟兰花, 吴福根, 彭程万. 二维点缺陷声子晶体中缺陷填充率对能带的影响. *应用声学*, 2009; **28**(2): 140—146
- 26 Munday J N, Bennett C B, Robertson W M. Band gaps and defect modes in periodically structured waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2002; **112**(4): 1353—1358