第 35 卷第 5 期　　声　学　学　报　　Vol. 35, No. 5
2010 年 9 月　　ACTA　ACUSTICA　　Sept., 2010

扬声器锥壳的全频段振动通解*

张志良
(浙江师范大学物理系　浙江　321004)
2009 年 5 月 4 日收到
2009 年 9 月 10 日定稿

摘要　为更好地理解扬声器数值计算结果，解析研究了扬声器锥壳轴对称振动在整个工作频段一致有效的通解，这些解以特殊函数的形式给出。在典型低频段，弯曲解仅表现为边界层效应；在典型转点频段，弯曲解存在于转点的外侧域；在典型高频段，弯曲解覆盖了整个扬声器锥壳。无矩解和弯曲解在转点频段是耦合的，该耦合特性表明在此频段不可能消除分割振动。
PACS 数：43.38, 43.40

General solutions for vibration of loudspeaker conical shells in the whole loudspeaker frequency range

ZHANG Zhiliang
(*Department of Physics, Zhejiang Normal University*　Zhejiang　321004)
Received May 4, 2009
Revised Sept. 10, 2009

Abstract　To understand better the numerical results of loudspeakers, the uniformly valid general solutions are studied analytically for axisymmetric vibration of loudspeaker conical shells in the whole loudspeaker frequency range, which are presented in the form of special functions. At typical low frequencies the bending solutions appear only as the boundary layer effect; in the typical turning-point range they exist in the outer part of the shell outside the turning point; at typical high frequencies they cover the whole loudspeaker shell. The membrane solutions and the bending solutions are coupled each other in the turning-point range, and this coupling shows that one can not eliminate the partition vibration in loudspeaker shells.

引言

要研究扬声器的声辐射，必然首先要研究扬声器振膜的力学振动行为。扬声器振膜最粗糙的近似是众所周知的平面刚性活塞模型。1940 年代，Brown[1] 和 Bordoni[2] 讨论了刚性锥体的声辐射。众所周知，活塞和刚性锥体模型仅在扬声器薄壳低频作整体振动时才有效。严格而言，扬声器振膜属于旋转弹性薄壳结构。1951 年，Nimura 等 [3] 建立了扬声器振膜的弹性薄壳模型，但他们求解锥壳振动方程的努力没有成功。1975 年， Frankort[4] 采用直接数值积分法系统研究了扬声器锥壳全频段的振动和声辐射，其工作成为扬声器研究的经典之作。1982 年， Suzuki 和 Nomoto[5] 将有限元方法引入到扬声器分析，自此以后有限元方法成为扬声器分析和设计的主要工具。“毫无疑问，根据数值结果来理解扬声器锥壳的振动行为是很困难的”[4] 。原因在于扬声器薄壳振动在某个特定频段存在所谓的转点问题 [6−9]：在转点的薄壳外侧部分出现横波，而在转点的薄壳内侧部分仅出现纵波。“该频段是扬声器至关重要的工作频段”[4] 。在薄壳振动理论中称出现转点的频段为转点频段或过渡频段，低于该频段称为低频段，高于该频段称为高频段。转点频段和高频段在电声工程上称为分割振动频段。作者没有见过分割振动频段的扬声器薄壳振动的系统解析解，求解的困难同样源自上述的转点问题。

许多作者研究过旋转薄壳振动的转点问题，直到最近才得到与数值结果一致的该问题解 [8] 。由于转点频段通解的结构迥然不同于一般微分方程的解的

*　浙江省自然科学基金资助项目 (100039)

结构，本文分析扬声器锥壳振动的转点频段通解，并将结果推广到扬声器的整个工作频段。续文将研究扬声器锥壳全频段的强迫振动和声辐射。由于非轴对称振动的声辐射是声短路的[4]，我们将只限于研究扬声器锥壳的轴对称振动。本文和续文解析分析的目的是更深刻地理解扬声器的数值结果，并揭示出数值分析不能得到的规律，以填补力学界和电声界的沟隙。

1 转点频段振动的通解

为能得到扬声器锥壳振动的解析解，采用如下近似。首先，忽略扬声器的内外支撑，即认为振膜的大端边界自由。支撑系统的效果除了低频基本共振和声频响曲线的“中频谷”外，还将对振膜大端边界处的振动位移产生一定的约束。将边界条件从有一定的约束放松为自由边界，无疑将使续文得到的振膜本征频率有所偏低，并使振型发生一定变化。这些影响将在续文中作一粗略估计。其次，忽略扬声器锥壳表面的的空气负载，即忽略辐射阻抗。文献 10 的有限元程序中考虑了空气负载的影响，并计算比较了有无空气负载的声压级差异，结果表明辐射阻抗的效果在低频主要表现为同振质量，在中高频主要表现为阻尼。第三，忽略扬声器锥壳的材料阻尼。阻尼主要在频响曲线的峰谷处起作用，部分削平了峰谷。最后，忽略音圈质量。整体振动的音圈的效果是给扬声器的力阻抗附加了一个额外的质量力抗。在考虑这些复杂因素后，数值计算无疑比解析分析更有效。解析分析的目的并非要取代数值分析，而是为了更好更深入地理解数值分析的结果。两种分析方法各有优势，具有互补性。忽略上述复杂因素可使我们将注意力集中于扬声器力学性能的最关键部分 —— 振膜，并专注于转点对振膜振动行为的影响。在上述近似下，锥形扬声器简化为如图 1 所示的截顶锥壳。

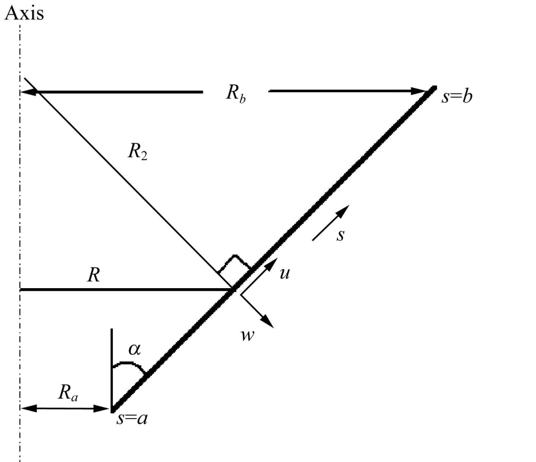

图 1　锥壳几何形状和坐标系

1.1 转点对解的影响

杆的纵振动方程为以纵向位移表示的 2 阶方程，横振动方程则是以横向位移表示的 4 阶方程。由于薄壳振动的纵向位移和横向位移是耦合的，因此薄壳轴对称振动为 6 阶方程[7]

$$-\mu^5\left(\sum_{k=0}^{6}a_k(s)\frac{\mathrm{d}^k w}{\mathrm{d}s^k}\right)+\sum_{k=0}^{2}b_k(s)\frac{\mathrm{d}^k w}{\mathrm{d}s^k}=0,\ (a_6=1). \tag{1}$$

式中已分离时间变量， w 为横向位移 (见图 1) 。文中，以上标 * 代表有量纲的长度量，薄壳位移 u 和 w, 厚度 h, 坐标 s, 半径 R 和在薄壳理论中经常采用的周向主曲率半径 R_2 均用薄壳小端有量纲的主曲率半径 $R_2^*(a)$ 无量纲化，故 $R_2(a)\equiv 1$ 。小参数 μ 和 ε 定义为 $\mu^5=\varepsilon^4=h^2/[12(1-\nu^2)]$, ν 为泊松比。上式左边第 1 部分与薄壳厚度有关，代表弯曲效应。第 2 部分代表无矩效应。系数

$$b_2(s)=\Omega^2-R_2^{-2}(s)\equiv b(s), \tag{2}$$

式中，无量纲频率参数 $\varOmega=(\omega/\sqrt{E/\rho})R_2^*(a)$ 。显然，当 $\varOmega$ 位于

$$R_a/R_b=R_2^{-1}(b)\le\Omega\le R_2^{-1}(a)=1, \tag{3}$$

对任一给定频率，在薄壳上存在 1 个圆 $s=s_*$ 使得 $b(s_*)=0$, s_* 称为方程 (1) 的转点，频段 (3) 即为转点频段，或者有量纲地表示为：

$$\sqrt{E/\rho}/[2\pi R_2^*(b)]\equiv f_{tb}<f<f_{ta}\equiv\sqrt{E/\rho}/[2\pi R_2^*(a)]. \tag{4}$$

由式 (3) 和式 (4) 可见，频率参数 $\varOmega$ 的归一化因子实际上是转点频段的上限频率 f_{ta} 。

转点位置决定于频率，位于

$$s_*=(\varOmega\tan\alpha)^{-1}. \tag{5}$$

在转点频段，随频率升高，转点由锥壳的大端移向小端。当 $\varOmega$ 位于转点频段内，转点将薄壳分成 3 个区域：转点域 $s\approx s_*$, $b(s)\approx 0$; 转点外侧域 $s>s_*$, $b(s)>0$; 转点内侧域 $s<s_*$, $b(s)<0$ 。另外，对低于转点频段的低频段，对整个薄壳，恒有 $b(s)<0$ ；对高于转点频段的高频段， $b(s)>0$ 对整个薄壳恒成立。

当 $b(s)\neq 0$ 时，用多尺度法可将方程 (1) 分离为弯曲方程和无矩方程：

$$\varepsilon^4\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}s^4}-b(s)w=0 \tag{6}$$

和

$$b(s)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}s^2}+b_1(s)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}+b_0(s)w=0. \tag{7}$$

这意味着在低频段、高频段和转点频段的非转点域，方程 (1) 的 6 个解总可分类为 4 个弯曲解和 2 个无矩解。显然，$b(s)$ 的符号决定了弯曲方程 (6) 的解的性质。当 $b(s)<0$(低频段和转点频段的转点内侧域)，弯曲解为不能传播的指数解，物理上仅表现为边缘扰动。因而扬声器在低频段可采用无矩近似，又因为低频段无矩解的波长 (纵波波长) 远大于扬声器振膜尺寸，工程分析中进一步采用刚性近似。当 $b(s)>0$（高频段和转点频段的转点外侧域），弯曲解中除了 2 个不能传播的指数解外，还将出现 2 个振荡的三角函数解，即出现横波 (分割振动)，意味着此时无矩应力已不能与横向惯性力平衡。另一方面，无矩方程 (7) 在低频段和高频段分别给出 2 个正则无矩解，和 4 个弯曲解一起构成方程 (1) 的基本解系。但在转点频段，因 $b(s_*)=0$，其解包含 1 个奇异无矩解和 1 个正则无矩解，正则无矩解不受转点出现的影响，仍构成方程 (1) 的基本解。而且，由通常的摄动法，例如 WKB 法，求得的方程 (6) 的 4 个弯曲解也在转点奇异 (见式 (19) 中的 H_w 的表达式)，但原方程 (1) 在转点非奇异。这个事实表明在转点，原方程 (1) 不能分离为弯曲方程 (6) 和无矩方程 (7)，Ross[6] 因而将转点解释为弯曲效应和无矩效应集中作用的区域。

综上所述，在转点频段，转点域外的解仍类似于低频段和高频段，可分离为 4 个弯曲解和 2 个无矩解，弯曲解在转点两侧有不同的行为，正则无矩解仍构成方程 (1) 的基本解， 4 个弯曲解和 1 个奇异无矩解在转点失效，薄壳转点问题归结为求解在转点失效的这 5 个解。

1.2 通解

转点问题的求法有两种，其一是求得在上述 3 个域内分别成立的解并加以匹配[6]，另外一种方法是寻求全域一致有效解[7−8]。所谓一致有效解是指解在薄壳的全域有统一的表达式，而非分段表示。除 1 个正则无矩解外，薄壳振动方程 (1) 的基本解系中另外 5 个一致有效解不能以初等函数表出，只能用特殊函数 (称为广义相关函数) 表出。文献 8 求解了以纵向位移 u 和横向位移 w 为未知量的联立微分方程组 (除 a_1 和 b_2，振动方程 (1) 的系数表达式非常冗长，该方程仅用于说明转点的存在和对解的影响)，给出了由广义相关函数 $Z_i(\zeta,p)(i=1,2,3,4,5,p$ 为整数，这里以 $Z_5(\zeta,p)$ 表示文献 8 中的 $R(\zeta,p))$ 表出的位移和相关物理量的上述 5 个解的表达式：

$$
\left\{\begin{array}{l}
u_i=\mu\alpha(s)Z_i(\zeta,1),\ N_i=C_N(s)Z_i(\zeta,1),\ w_i=\gamma_0(s)Z_i(\zeta,0)\quad(i=1,\ 2,\ 3)\\
u_4=\mu\alpha(s)\zeta^{-1}Z_4(\zeta,-3)-u_6\zeta^{-1}Z_4(\zeta,2),\\
N_4=C_N(s)\zeta^{-1}Z_4(\zeta,-3)-N_6\zeta^{-1}Z_4(\zeta,2),\\
w_4=\gamma(s)Z_4(\zeta,0)-w_6Z_4(\zeta,1),\\
u_5=u_{5m}-u_6\left[\zeta^{-1}Z_5(\zeta,2)+\ln|\zeta|+\gamma-1\right]+\mu\alpha(s)\zeta^{-1}Z_5(\zeta,-3)\\
N_5=N_{5m}-N_6\left[\zeta^{-1}Z_5(2)+\ln\zeta+\gamma-1\right]+C_N(s)\zeta^{-1}Z_5(\zeta,-3),\\
w_5=w_{5m}-w_6\left[Z_5(\zeta,1)+\ln|\zeta|+\gamma\right]+\gamma(s)\zeta^{-1}Z_5(\zeta,-4),\\
\beta_i=-\mu^{-1}z'(s)\gamma(s)Z_i(\zeta,-1),\\
M_i=-\mu^{-2}z'^2(s)\gamma(s)Z_i(\zeta,-2),\\
Q_i=-\mu^{-3}z'^3(s)\gamma(s)Z_i(\zeta,-3),\ (i=1,2,3,4,5)
\end{array}\right. \tag{8}
$$

式中，转角 $\beta=-w'$, N, M 和 Q 分别为 s 方向的无量纲的薄膜应力合力、弯矩和横剪力，无量纲因子分别为 $Eh^*/(1-\nu^2)$, $Eh^{*3}/[12(1-\nu^2)R_2^*(a)]$ 和 $Eh^{*3}/[12(1-\nu^2)R_2^{*2}(a)]$，这里 h^* 代表有量纲的薄壳厚度；下标 $5m$ 和 6 分别代表上述的奇异无矩解和正则无矩解，$C_N(s)=-(\nu^{-1}-\nu)\mu\alpha(s)/s$，欧拉常数 $\gamma=0.5772156649\cdots$，广义相关函数的自变量

$$
\zeta=z(s)/\mu\equiv\left[\frac{5}{4}\int_{s_*}^{s}b^{1/4}(x)\mathrm{d}x\right]^{4/5}\Big/\mu, \tag{9}
$$

在取

$$
u_6(s_*)=\nu\varepsilon^{0.5}/R_2(s_*) \tag{10}
$$

的条件下，系数 $\alpha(s)$ 和 $\gamma(s)$ 为：

$$
\left\{\begin{array}{l}
\alpha(s)=-\mu^{-3/8}\dfrac{\nu}{R_2}\left(\dfrac{s_*}{s}\right)^{1/2}\left[\dfrac{z'(s_*)}{z'(s)}\right]^{5/2},\\
\gamma(s)=\mu^{-3/8}z'(s_*)\left(\dfrac{s_*}{s}\right)^{1/2}\left[\dfrac{z'(s_*)}{z'(s)}\right]^{3/2}.
\end{array}\right. \tag{11}
$$

式 (8) 中的 6 个物理量中，对无矩解， u, N 和 w 为基本量，其余量为小量；对弯曲解， w, β, M 和 Q 为基本量， u 和 N 为小量。对旋转薄壳，由于纵向位移必将导致横向位移，因此 w 也是纵波运动的基本量，这与杆或板振动不同。

本文以 Frankort[4] 重点研究的标号 50.3 的扬声器锥壳作为算例，其参数为半顶角 50°，内半径 17 mm，外半径 83 mm，厚度 0.23 mm，杨氏模量 2×10^9 N/m^2，密度 600 kg/m^3，泊松比 0.3。其转点频段为 $0.2048 < \Omega < 1$，或者 2250 Hz$< f <$10980 Hz。图 2 示出了据式 (9) 由 Simpson 积分公式算得的伸长自变量 ζ 和锥壳坐标 s 在 3 个频率下的关系。图中，频率 5000 Hz 位于转点频段，另外 2 个频率分别位于低频段和高频段。可以看到，在转点频段，ζ 变号，$\zeta=0$ 对应着转点位置；在低频段，$\zeta<0$；在高频段，$\zeta>0$。

1.3 广义相关函数的计算

如同典型的特殊函数，广义相关函数的计算需给出其级数表达式和渐近展开式。级数表达式为[8]:

$$\begin{bmatrix} Z_1(p) \\ Z_2(p) \\ Z_3(p) \\ Z_4(p) \\ Z_5(p) \end{bmatrix} = \frac{5^{-\frac{p+4}{5}}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5^{1/5}\zeta)^n}{n!}\varGamma^*\left(\frac{n+1-p}{5}\right)\begin{bmatrix} \sin 2\alpha_{np} \\ \cos\alpha_{np}-\cos 2\alpha_{np} \\ 1-\cos\alpha_{np} \\ \sin\alpha_{np} \\ \pi\cos\alpha_{np} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2J(\zeta,p) \\ 0 \\ 0 \\ 0.4J(\zeta,p) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

式中：$\varGamma^*(x)\,|_{x\neq0,-1,-2,\cdots}=\varGamma(x)$，$\varGamma^*(0)=\ln 5-\gamma$，$J(\zeta,p)=0\ (p\le0)$，$J(\zeta,1)=1$，$J(\zeta,2)=\zeta$，$\alpha_{np}=2\pi(n+1-p)/5$。上述级数表达式虽然一致收敛，但收敛甚慢，且没有明确的物理含义。

广义相关函数的渐近表达式为[8]:

$$\begin{bmatrix} r\exp(\eta)\sin[\eta+(6p+1)\pi/8] \\ r\exp(\eta)\cos[\eta+(6p+1)\pi/8] \\ r\exp(-\eta)\cos[\eta+(2p+3)\pi/8] \\ r\exp(-\eta)\sin[\eta+(2p+3)\pi/8] \end{bmatrix} \xleftarrow{\zeta\to-\infty} \begin{bmatrix} Z_1(p) \\ Z_2(p) \\ Z_3(p) \\ Z_4(p) \end{bmatrix} \xrightarrow{\zeta\to+\infty} \begin{bmatrix} (-1)^p r\exp(-\theta)/2 \\ r\cos[\theta-(2p-1)\pi/4] \\ r\exp(\theta) \\ r\sin[\theta-(2p-1)\pi/4]+J(\zeta,p) \end{bmatrix},$$
$$R_m \xleftarrow{\ \zeta\to-\infty\ } Z_5(p) \xrightarrow{\ \zeta\to+\infty\ } R_m+\pi Z_2(p), \tag{13}$$

式中，$r=|\zeta|^{-\frac{2p+3}{8}}/\sqrt{2\pi}$，$\theta=\varepsilon^{-1}\int_{s_*}^{s}b^{1/4}(x)\mathrm{d}x$，$\eta=(\sqrt{2}\varepsilon)^{-1}\int_{s}^{s_*}[-b(x)]^{1/4}\mathrm{d}x$，当 $p\le0$ 时 $R_m=(-p)!(-\zeta)^{p-1}$，当 $p\ge1$ 时，$R_m=(-\ln|\zeta|-\gamma+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k})\frac{\zeta^{p-1}}{(p-1)!}$。式 (12)、式 (13) 及下文中，省略 $Z_i(\zeta,p)$ 的自变量 ζ。图 3 示出了由级数表达式和渐近展开式计算的后 3 个零阶广义相关函数的值。可见，当 $|\zeta|>2$ 时，两种计算结果已非常接近，已能

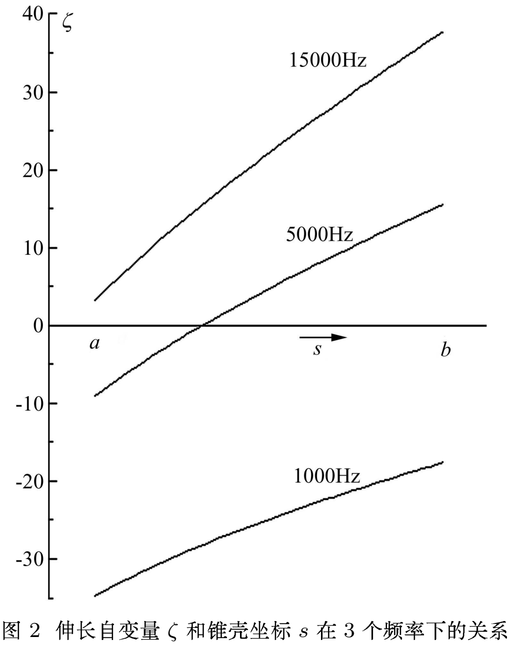

图 2　伸长自变量 ζ 和锥壳坐标 s 在 3 个频率下的关系

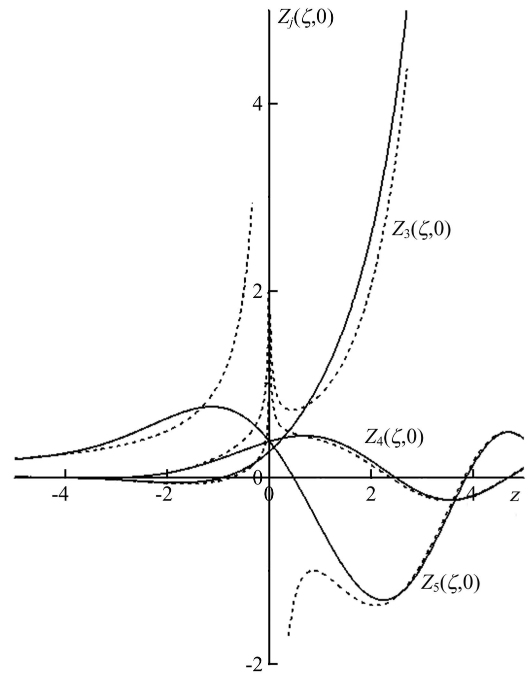

图 3　由级数表达式和渐近展开式计算的后 3 个广义相关函数的值
(实线：级数表达式计算值；虚线：渐近展开式计算值)

满足扬声器工程需要 (对绝大多数工程所需，Ross[6] 给出的判据为 $|\zeta|>5$)。当 $|\zeta|\le 2$ 时，广义相关函数的值由级数表达式 (12) 计算，而当 $|\zeta|>2$ 时，可由渐近展开式 (13) 简化广义相关函数的计算。$|\zeta|\le 2$ 可视为转点域宽度的具体尺寸，因为下面可以看到，一旦渐近展开式可用，解即可分类为弯曲解和无矩解。式 (12) 和式 (13) 给出了广义相关函数的足够计算信息，广义相关函数的积分表达式见文献 8 。

1.4 无矩解的计算

解的表达式 (8) 中出现以下标 $5m$ 和 6 表示的奇异无矩解和正则无矩解，在转点频段，无矩解没有简单表达式可用，一般只能数值积分无矩方程得到。对锥壳，无矩方程为[4]：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\nu g-1}{s}N+\dfrac{1-\nu^2}{s^2}(g-\Omega^2 s^2)u,\\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=-\dfrac{\nu^2 g-1}{1-\nu^2}N-\dfrac{\nu g}{s}u,\\ [(\Omega s\tan\alpha)^2-1]w=\tan\alpha[u+\nu sN/(1-\nu^2)].\end{cases} \tag{14}$$

式中 $g=(\Omega s\tan\alpha)^2/[(\Omega s\tan\alpha)^2-1]$ 。引入以下变换

$$\begin{cases}n=sN_1/(1-\nu^2),\\ S=X^2=(\Omega s\tan\alpha)^2.\end{cases} \tag{15}$$

将式 (14) 简化为：

$$\begin{cases}2(S-1)n'=\nu n+(\csc^2\alpha-\cot^2\alpha S)u,\\ 2S(S-1)u'=-\left[1-(1-\nu^2)S\right]n-\nu Su,\\ w=\dfrac{\tan\alpha}{S-1}(u+\nu n),\end{cases} \tag{16}$$

式中撇代表对 S 求导。又 1 次看到转点 $S=1$ 成为上述方程的奇点。上述方程的幂级数形式的解容易得到，作者已在文献 11 中给出 N_{5m}, N_6, u_{5m}, u_6, w_{5m} 和 w_6 的幂级数形式解，该文研究了扬声器锥壳转点频段的振动。

广义相关函数和无矩解的计算问题一旦解决，由式 (8) 便可决定给定频率下的解。图 4 示出了 5000 Hz 时的计算扬声器薄壳横向位移的 6 个基本解的相对值，其中 $w_1\sim w_5$ 分别被它们的最大绝对值相除，而 w_6 被 w_4 的最大绝对值相除，w_{5m} 被 w_5 的最大绝对值相除。可见，w_{5m} 确实在转点奇异，但 w_5 以及所有的基本解在转点非奇异。该图在下面还将讨论。

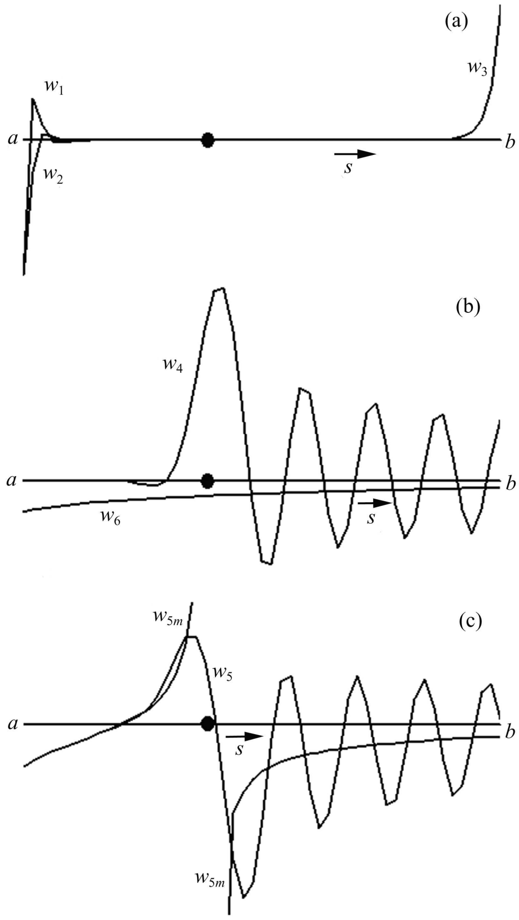

图 4 5000 Hz 时的 6 个基本解：黑点，转点位置；(a) w_1, w_2 和 w_3, (b) w_4 和 w_6, (c) w_5 和 w_{5m}

1.5 解的分段表示

解表达式 (8) 是全域一致有效的。将渐近展开式 (13) 代入式 (8) 得到转点内侧域和转点外侧域分别有效的解：

当 $s<s_*(\zeta<-2)$:

$$\begin{cases}u=-\varepsilon H_u\left[A_1e^{\eta}s_-(\eta)+A_2e^{\eta}c_-(\eta)+A_3e^{-\eta}s_+(\eta)-A_4e^{-\eta}c_+(\eta)\right]+A_5u_{5m}+A_6u_6,\\ N=-\varepsilon H_n\left[A_1e^{\eta}s_-(\eta)+A_2e^{\eta}c_-(\eta)+A_3e^{-\eta}s_+(\eta)-A_4e^{-\eta}c_+(\eta)\right]+A_5N_{5m}+A_6N_6,\\ w=H_w\left[A_1e^{\eta}s_+(\eta)+A_2e^{\eta}c_+(\eta)-A_3e^{-\eta}s_-(\eta)+A_4e^{-\eta}c_-(\eta)\right]+A_5w_{5m}+A_6w_6,\\ \beta=\varepsilon^{-1}|b|^{1/4}H_w\left[A_1e^{\eta}c_-(\eta)-A_2e^{\eta}s_-(\eta)-A_3e^{-\eta}c_+(\eta)-A_4e^{-\eta}s_+(\eta)\right],\\ M=-\varepsilon^{-2}|b|^{1/2}H_w\left[A_1e^{\eta}c_+(\eta)-A_2e^{\eta}s_+(\eta)+A_3e^{-\eta}c_-(\eta)+A_4e^{-\eta}s_-(\eta)\right],\\ Q=-\varepsilon^{-3}|b|^{3/4}H_w\left[A_1e^{\eta}s_-(\eta)+A_2e^{\eta}c_-(\eta)+A_3e^{-\eta}s_+(\eta)-A_4e^{-\eta}c_+(\eta)\right].\end{cases} \tag{17}$$

当 $s > s_*(\zeta > 2)$:

$$\begin{cases} u = \varepsilon H_u\left[-A_1/2e^{-\theta} + A_2 s(\theta) + A_3 e^{\theta}\right] - A_4\left[\varepsilon H_u c(\theta) + u_6\right] + A_5\left[u_{5m} + \pi\varepsilon H_u s(\theta)\right] + A_6 u_6, \\ N = \varepsilon H_n\left[-A_1/2e^{-\theta} + A_2 s(\theta) + A_3 e^{\theta}\right] - A_4\left[\varepsilon H_n c(\theta) + N_6\right] + A_5\left[N_{5m} + \pi\varepsilon H_n s(\theta)\right] + A_6 N_6, \\ w = H_w\left[A_1/2e^{-\theta} + A_2 c(\theta) + A_3 e^{\theta}\right] + A_4\left[H_w s(\theta) - w_6\right] + A_5\left[w_{5m} + \pi H_w c(\theta)\right] + A_6 w_6, \\ \beta = -\varepsilon^{-1} b^{1/4} H_w\left[-A_1/2e^{-\theta} - A_2 s(\theta) + A_3 e^{\theta} + A_4 c(\theta) - A_5 \pi s(\theta)\right], \\ M = -\varepsilon^{-2} b^{1/2} H_w\left[A_1/2e^{-\theta} - A_2 c(\theta) + A_3 e^{\theta} - A_4 s(\theta) - A_5 \pi c(\theta)\right], \\ Q = -\varepsilon^{-3} b^{3/4} H_w\left[-A_1/2e^{-\theta} + A_2 s(\theta) + A_3 e^{\theta} - A_4 c(\theta) + A_5 \pi s(\theta)\right], \end{cases} \tag{18}$$

式中 A_i 为待定常数， θ 和 η 的含义同式 (13), 且

$$\begin{cases} s(\theta) = \sin(\theta + \pi/4), \quad (\theta) = \cos(\theta + \pi/4), \\ s_+(\eta) = \sin(\eta + \pi/8), \quad c_+(\eta) = \cos(\eta + \pi/8), \\ s_-(\eta) = \sin(\eta - \pi/8), \quad c_-(\eta) = \cos(\eta - \pi/8), \\ H_u = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\nu}{R_2}\left(\dfrac{s_*}{s}\right)^{1/2}\dfrac{b'(s_*)^{1/2}}{|b(s)|^{5/8}}, \\ H_n = -\dfrac{1-\nu^2}{\nu s} H_u, \\ H_w = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{s_*}{s}\right)^{1/2}\dfrac{b'(s_*)^{1/2}}{|b(s)|^{3/8}}. \end{cases} \tag{19}$$

如前述, 在转点域外解可以区分为弯曲解和无矩解。上述解中变量 θ, η 的函数代表弯曲解，下标 $5m$ 和 6 分别代表奇异无矩解和正则无矩解。由于小参数出现在 θ, η 的分母，弯曲解相对无矩解是快变的，在转点域外变化尺度为 s/ε, 在转点域内是 s/μ 。另外，式 (17) 和式 (18) 和图 4 清楚表明，在转点内侧域弯曲解仅存在指数解；而在转点外侧域，除指数解外，还出现三角函数解。由于弯曲解的快变特点，指数解仅表现为边界层效应，见图 4(a); 三角函数解表现为波长较短的弯曲波，见图 4(b) 和图 4(c) 。

在转点域内，利用广义相关函数的递推公式 [8], 由式 (8) 得到：

当 $s \approx s_*(|\zeta| < 2)$:

$$\begin{cases} u = -u_6(s_*)\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{5} A_i Z_i(\zeta, 1) + A_5\left[2/\nu + \gamma + \ln\zeta'(s_*)\right] - A_6\right\}, \\ N = \varepsilon^{1/2}(1-\nu^2) R_2^{-2}(s_*)\tan\alpha\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{5} A_i Z_i(\zeta, 1) + A_5\left[\gamma + \ln\zeta'(s_*)\right] - A_6\right\}, \\ w = \varepsilon^{1/2}\mu^{-1} z'(s_*)\displaystyle\sum_{i=1}^{5} A_i Z_i(\zeta, 0) + A_6 w_6(s_*) \\ \beta = -\varepsilon^{1/2}\mu^{-2} z'^2(s_*)\displaystyle\sum_{i=0}^{5} A_i Z_i(\zeta, -1) \\ M = -\varepsilon^{1/2}\mu^{-3} z'^3(s_*)\displaystyle\sum_{i=0}^{5} A_i Z_i(\zeta, -2), \\ Q = -\varepsilon^{1/2}\mu^{-4} z'^4(s_*)\displaystyle\sum_{i=0}^{5} A_i Z_i(\zeta, -3), \end{cases} \tag{20}$$

式中的广义相关函数用级数表达式计算。它们在转点均非奇异。式 (17) 、式 (18) 和式 (20) 中， β, M 和 Q 的无矩解部分由于是小量而没有写出。

1.6 解的连接公式和耦合特性

由式 (17) 和式 (18) 可得在上述 2 个域内分别成立的解的连接关系 (以 w 为例):

$$\begin{bmatrix} w_i^{(-)} \\ w_4^{(-)} \\ w_{5m} \\ w_6 \end{bmatrix} \xleftarrow{\zeta\to-\infty} \begin{bmatrix} w_i \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\zeta\to+\infty} \begin{bmatrix} w_i^{(+)} \\ w_4^{(+)} - w_6 \\ w_{5m} + \pi w_2^{(+)} \\ w_6 \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{21}$$

式中 $w_1^{(-)} \sim w_4^{(-)}$ 和 $w_1^{(+)} \sim w_4^{(+)}$ 分别代表式 (17) 和式 (18) 中转点内侧域和转点外侧域的弯曲解，它们实际上可由弯曲方程 (6) 求得。前 3 个解在转点域外为纯粹的弯曲解，第 6 个解在全域为纯粹的无矩解。旋转薄壳转点频段解与通常微分方程解的不同之处体现在第 4 和第 5 个解：在由转点内侧域穿过转点后，第 4 个弯曲解另外连接了正则无矩解 (图 4(b) 中，转点外侧域的 w_4 因含有 w_6 而变得对横轴不对称), 而奇异无矩解则连接了第 2 个弯曲解 (见图 4(c)) 。可见，在转点频段的转点域外，虽然类似于低频段和高频段，解仍可分离为弯曲解和无矩解，但不同于低频段和高频段，弯曲解和无矩解呈现出强烈的耦合特性：弯曲解可由无矩解 “生出”, 反之亦然。此耦合特性源于在薄壳的转点内侧域，薄膜应力能与横向惯性力平衡，而在转点外侧域，薄膜应力不能与横向惯性力平衡这个物理事实。正是这对称的耦合结构将导致一些转点频段的特有现象，而且，单纯的数值计算难于解释这些特有现象。上述耦合特性的一个直接的推论是，不同于杆振动和板振动，转点频段的薄壳振动不可能实现单一的纵波运动或者横波运动，因此，通过改变驱动方式或边界条件不可能消除分割振动 (消除扬声器振膜的分割振动一直是扬声器工程界梦寐以求的) 。

2 转点频段解在低频段和高频段的推广

解的表达式 (8) 是由摄动法求得的，求解过程中假定频率参数的量级为：

$$\varOmega = O(1), \tag{22}$$

上式为式 (8) 成立的频率范围。此范围包含了通常所谓的低频段、转点频段和高频段，通常也包含了整个扬声器频段。以记号 $\varOmega_{tb} = R_a/R_b$ 和 $\varOmega_{ta} = 1$ 分别代表转点在锥壳的大端和小端的频率，低频段、转点频段和高频段划分表示为 $\varOmega < \varOmega_{tb}$, $\varOmega_{tb} \le \varOmega \le 1$ 和 $\varOmega > 1$ 且 $\varOmega = O(1)$ 。由式 (5) 可见，在低频段，转点位于假想的薄壳大端的延长面上，并随频率升高由无穷远处趋向于薄壳大端；在转点频段，随频率升高，转点由锥壳的大端移向小端；在高频段，转点位于假想的薄壳小端的延长面上。由于式 (8) 所示解对所有 ζ 值一致有效，而 ζ 是频率和空间坐标的混合变量 (见图 2), 因而该解对整个 $\varOmega = O(1)$ 频率范围也应一致有效。

在转点位于薄壳大端外侧且满足 $\zeta(b) < -2$(注意式 (9) 中积分上下限) 的频率范围，广义相关函数 $\zeta \to -\infty$ 的渐近展开式适用于整个薄壳。此时，薄壳的全域振动完全由式 (17) 确定，该解与张若京[12] 给出的薄壳低频振动解的第一阶近似一致，与 Ross[13] 给出的低频结果相同。解呈现出薄壳低频振动的典型特征：弯曲解仅表现为边界层效应。因此称频率范围 $\zeta(b) < -2$ 为典型低频段。扬声器在此频段内作整体振动。借助于 Taylor 展开，由式 (9) 将该频段表为：

$$\varOmega < \varOmega_{tb}^{(-)} \equiv \left[1 - 2\mu\left(2R_b^2\cos^2\alpha\sin^{-4}\alpha\right)^{-0.2}\right] R_a/R_b. \tag{23}$$

在转点位于薄壳小端外侧且满足 $\zeta(a) > 2$ 的频率范围，即：

$$\varOmega > \varOmega_{ta}^{(+)} \equiv 1 + 2\mu\left(2R_a^2\cos^2\alpha\sin^{-4}\alpha\right)^{-0.2}. \tag{24}$$

此时整个截顶薄壳位于转点的上部，广义相关函数 $\zeta \to +\infty$ 的渐近展开式适用于整个薄壳。薄壳全域解由式 (18) 给出，该解与 Ross[14] 和张若京[15] 给出的薄壳高频振动解类似。解呈现出薄壳高频振动的典型特征：弯曲波覆盖了整个薄壳。因此可称频率范围式 (24) 为典型高频段。

仿照式 (23) 和式 (24), 再定义两个界限频率

$$\begin{aligned} &\zeta(b) = 2, \\ &\varOmega = \varOmega_{tb}^{(+)} \equiv \left[1 + 2\mu\left(2R_b^2\cos^2\alpha\sin^{-4}\alpha\right)^{-0.2}\right] R_a/R_b \end{aligned} \tag{25}$$

和

$$\begin{aligned} &\zeta(a) = -2, \\ &\varOmega = \varOmega_{ta}^{(-)} \equiv 1 - 2\mu\left(2R_a^2\cos^2\alpha\sin^{-4}\alpha\right)^{-0.2}. \end{aligned} \tag{26}$$

在频段 $\varOmega_{tb}^{(+)} \le \varOmega \le \varOmega_{ta}^{(-)}$, 转点位于除边缘邻域外的锥壳上。区域 $s < s_*$ 中的振动行为类似于典型低频段，弯曲解仅表现为边界层效应；区域 $s > s_*$ 中的振动行为类似于典型高频段，出现弯曲波。而转点域 $s \approx s_*$ 成为上述两个区域的过渡区。在此区域，广义相关函数用幂级数计算，解没有明确的物理意义。随频率升高，转点作为弯曲波的前导由锥壳的大端移向小端，分割振动区域随之扩大。称频段 $\varOmega_{tb}^{(+)} \le \varOmega \le \varOmega_{ta}^{(-)}$ 为典型转点频段。转点位置的简单公式 (5) 因而可作为确定分割振动区域的估算公式。该问题也一直是扬声器工程界所关心的。

频率范围 $\varOmega_{tb}^{(-)} \le \varOmega \le \varOmega_{tb}^{(+)}$ 构成典型低频段和典型转点频段的频率分界区，以后称为分界区 1, $\varOmega_{ta}^{(-)} \le \varOmega \le \varOmega_{ta}^{(+)}$ 构成典型转点频段和典型高频段的频率分界区，称为分界区 2 。对分界区 1, 转点位于锥壳大端邻域，壳体的分段振动解由式 (20) 和

式 (17) 给出；对分界区 2, 转点位于锥壳小端邻域，壳体的分段振动解由式 (18) 和式 (20) 给出。因而在这两个频率区，广义相关函数的渐近展开式在其中的一个边界上不能适用。这将导致给出的扬声器薄壳振动的解析表达式非常复杂且缺乏明显的物理意义，因此续文将仅讨论 3 个典型频段的振动解析解。

至此，将频率由低到高分成了 5 个频段，分别为典型低频段、分界区 1 、典型转点频段、分界区 2 和典型高频段。对本文分析的扬声器薄壳 (其转点频段范围为 2250~10980 Hz), 据式 (23) — (26) 可算得 4 个界限频率分别为 0.185, 0.225, 0.814 和 1.185, 可见分界区的频率区间较小。上述 5 个频段的有量纲频率范围列于表 1 。

表 1 扬声器锥壳的 5 个频率区域

典型低频段	分界区 1	典型转点频段	分界区 2	典型高频段
< 2028 Hz	2028 Hz~ 2472 Hz	2472 Hz~ 8942 Hz	8942 Hz~ 13012 Hz	> 13012 Hz

3 物理量的量级关系

考虑到式 (10), 正则无矩解和转点域以外的奇异无矩解的量级关系为：

$$u, w, \beta, N, M, Q = O(\varepsilon^{1/2}). \tag{27}$$

由式 (17) 和式 (18) 可知，转点域以外的纯弯曲解的量级关系为：

$$\begin{cases} u, N = O(\varepsilon), \\ w = O(1), \\ \beta = O(\varepsilon^{-1}), \\ M = O(\varepsilon^{-2}), \\ Q = O(\varepsilon^{-3}). \end{cases} \tag{28}$$

由式 (20) 可知，除正则无矩解外的 5 个解在转点域的量级关系是：

$$\begin{cases} u, N = O(\varepsilon^{1/2}), \\ w = O(\mu^{-1}\varepsilon^{1/2}), \\ \beta = O(\mu^{-2}\varepsilon^{1/2}), \\ M = O(\mu^{-3}\varepsilon^{1/2}), \\ Q = O(\mu^{-4}\varepsilon^{1/2}). \end{cases} \tag{29}$$

这些量级关系在确定扬声器薄壳强迫振动时将会用到。由上述量级关系知道，在无矩解 (纵波) 中， u 和 w 同量级，这点与板振动显然不同；在弯曲解（横波）中 w 比 u 大 1 个量级。

4 结论

不同于一般微分方程解的结构，扬声器锥壳转点频段的通解互相耦合，快变的横波运动可由慢变的纵波运动耦合产生，因此在转点频段，不可能通过改变驱动方式或边界条件实现单一的纵波运动，消除分割振动。

转点频段的通解退化可得到低频段和高频段的通解，这些解覆盖了扬声器的整个工作频段。全域无矩解存在于所有频段，弯曲解在典型低频段只有不传播的指数解，在典型转点频段三角函数解出现在转点的外侧域，在高频段该三角函数解覆盖了全域。

参 考 文 献

1 Brown W N Jr. Theory of conical sound radiators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1941; **13**(1): 20—22

2 Bordoni P G. The conical sound source. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1945; **28**(2): 123—126

3 Nimura T, Matsui E, Shibayama K *et al.* Study on the cone type dynamic loudspeakers (in Japanese). *J. Acoust. Soc. Jpn.*, 1951; **7**(1): 16—28

4 Frankort F J M. Vibration and sound radiation of loudspeaker cones. N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven: 1975
中译本：赵志诚，杨良柏，李联芳译. 扬声器锥体的振动和声辐射. 北京：科学出版社， 1988

5 Suzuki K, Nomoto I. Computerized analysis and observation of the vibration modes of a loudspeaker cone. *J. Audio Eng. Soc.*, 1982; **30**(3): 98—106

6 Ross E W. Transition solutions for axisymmetric shell vibrations. *J. Math. Phy.*, 1966; **54**(4): 335—355

7 张若京，张维. 旋转薄壳自由振动中的转点问题及其奇异摄动解. 中国科学 (A 辑), 1990; 20(1): 66—74

8 张志良，程昌钧. 旋转薄壳转点频段的轴对称振动解. 固体力学学报， 2006; **27**(2): 135—140

9 张志良，程昌钧. 旋转薄壳振动耦合转点问题的一致有效解. 中国科学 (G 辑), 2009; **39**(8): 1116—1125

10 张志良，陶擎天. 一种改进的扬声器 CAD 系统. 浙江师大学报 (自然科学版), 1999; **22**(1): 28—33

11 Zhang Z L, Cheng C J. Analytical solutions for axisymmetric vibration of loudspeaker cone in transitional range. *Applied Acoustics*, 2007; **68**(10): 1135—1155

12 张若京. 薄壳的低频振动. 上海力学， 1990; **11**(4): 41—50

13 Ross E W. Asymptotic analysis of the axisymmetric vibration vibration of shells. *J. Appl. Mech.*, 1966; **33**(1): 85—92

14 Ross E W, Matthews W T. Frequencies and mode shapes for axisymmetric vibration of shells. *J. Appl. Mech.*, 1967; **34**(1): 73—80

15 张若京，张维. 截顶旋转薄壳轴对称高频自由振动的奇异摄动解. 固体力学学报， 1991; **12**(1): 61—65