

献给马大猷教授 95 华诞

## 平面近场声全息中正则化参数的确定\*

李凌志<sup>1,2</sup> 李骏<sup>2</sup> 卢炳武<sup>2</sup> 刘英杰<sup>2</sup> 刘克<sup>1</sup>

(1 中国科学院声学研究所噪声与振动重点实验室 北京 100190)

(2 中国第一汽车集团公司技术中心振动噪声研究室 长春 130011)

2009 年 4 月 9 日收到

2010 年 1 月 3 日定稿

**摘要** 近场声全息的逆向重建过程属于线性病态逆问题, 必须进行正则化处理。本文对三种基于 Tikhonov 正则化的参数选择方法, 即离差原理法、广义交叉验证法、L 曲线法, 在不同全息距离、声源频率和信噪比的条件下进行了比较, 结果表明, 它们在远距离及低噪声环境下难以获得合适的正则化参数。采用等效噪声方差的方法, 对其中较为稳定的离差原理进行了改进, 使其在较远全息距离及低噪声环境下仍能获得合适的正则化参数。相应的仿真实验表明, 改进后的离差原理法在很宽的信噪比 (> 6 dB) 和较远的全息距离 (~ 10 cm) 均能稳定地找到合适的正则化参数。此外, 由于该方法无须对全息声压进行平滑处理, 其有效重建孔径和全息孔径相等。

PACS 数: 43.50, 43.60

### The determination of regularization parameters in planar nearfield acoustic holography

LI Lingzhi<sup>1,2</sup> LI Jun<sup>2</sup> LU Bingwu<sup>2</sup> LIU Yingjie<sup>2</sup> LIU Ke<sup>1</sup>

(1 Key Laboratory of Noise and Vibration Research, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences Beijing 100190)

(2 Vibration and Noise Research Section, China FAW Group Corporation R&D Center Changchun 130011)

Received Apr. 9, 2009

Revised Jan. 3, 2010

**Abstract** The reconstruction of Nearfield Acoustic Holography (NAH) is a linear, ill-posed inverse problem, in which a regularization procedure must be used. We compared three Tikhonov regularization based parameter selection methods, Morozov Discrepancy Principle method (MDP), Generalized Cross Validation method (GCV), and L-curve method, at various hologram distances, sound source frequencies, and Signal-to-Noise Ratios (SNR). The results show that they are all not robust at large hologram distances and low noise conditions. Based on an equivalent-noise-variance method, we established an improved method for estimating the noise variance in the MDP method, which is relative robust among the three, and made it work at relatively large hologram distances and low noise conditions. Numerical simulations show that the improved MDP method is robust in determining proper regularization parameters over a large SNR range (> 6 dB) and at a relatively large hologram distance (~ 10 cm). Moreover, the improved MDP method has a valid reconstruction aperture that is equal to the hologram aperture because it is not necessary to smooth the hologram pressure.

### 引言

近场声全息 (Nearfield Acoustic Holography, NAH) 理论首先由 Maynard 和 Williams 于上世纪 80

年代初提出<sup>[1-2]</sup>。基于 FFT 的有限孔径近场声全息的逆向重建过程属于离散声学逆问题, 由于逆格林函数在高波数区域呈指数形式增加, 全息面声压中微小误差将可能导致重建声压巨大的误差。最早抑制噪声的方法是在波数域对全息角谱加一个指数形式的低

\* 中国科学院声学研究所所长择优基金资助项目 (GSO7SJJ15)

通滤波器<sup>[3-4]</sup>,但是由于这种方法需要手动选择滤波参数,在实际应用中受到了较大的限制。正则化可以提供一种基于本征值分解(Singular Value Decomposition, SVD),将不适定性问题转化为适定性问题的有效方法,其中最常用的正则化方法为 Tikhonov 正则化方法<sup>[5-6]</sup>。正则化参数的确定是正则化应用中的关键,依是否需要噪声信息可分为两类:一类是需要知道先验噪声方差才能确定正则化参数的方法,如离差原理<sup>[6]</sup>(Morozov Discrepancy Principle, MDP);另一类是无需先验噪声信息的自动选择参数的方法,最常用的两种是广义交叉验证法(Generalized Cross Validation, GCV)和 L-curve 法<sup>[7-8]</sup>。为了使用基于 SVD 的 Tikhonov 正则化方法,需将平面 NAH 的重建过程转换为离散系统传递矩阵的表达形式。在平面 NAH 中,传递矩阵奇异值的左右单位正交矩阵和奇异值可用离散傅里叶系数及格林函数直接写出<sup>[6]</sup>,避免了运算量很大的奇异值分解过程。

本文的第二部分对最常用的 Tikhonov 正则化方法的原理和基本思想进行阐述并给出其在平面 NAH 中的表达式。随后介绍了用于判断离散病态最小二乘问题病态程度的离散 Picard 准则(The Discrete Picard Condition)。对需要先验知道噪声方差的 MDP 方法及两种无需先验噪声知识的 GCV 和 L-curve 方法的基本思想及在 NAH 中的实现方法进行了解释,并对三种方法进行了比较及局限性分析。结果表明:在较低噪声、较远全息距离的条件下,全息声压由于有

限孔径边缘截断带来的吉布斯能量泄露误差将大于测量中的噪声误差,文献 6 中的噪声估计方法已经不能描述吉布斯振荡误差。

针对此问题,利用平面图像大多数情况下具有低波数分量大,随着波数增加,其分量变小的特点<sup>[9]</sup>,将全息角谱的噪声区域重新进行了划分,提出了等效噪声方差估计方法。其基本思想是将吉布斯效应带来的复杂的、非高斯噪声特征的并且难以进行理论分析的高波数误差等效于具有一定方差的高斯噪声。随之即可利用三者中较为稳定的 MDP 法按原来的思想进行正则化处理。在不同全息距离、声源频率及信噪比(Signal-to-Noise Ratios, SNR)条件下的数值仿真实验表明:MDP、GCV 和 L-curve 三种方法的结果和上述的分析结论是一致的;改进的 MDP(Improved MDP, IMPD)方法对于低噪声、相对较远距离的测量环境,能稳定获得很接近最佳解的正则化参数。此外,由于没有使用边缘平滑衰减的窗函数来抑制吉布斯效应,可以不需要满足全息孔径比关心的重建区域大两倍的测量要求。

## 1 理论公式

### 1.1 平面近场声全息

平面近场声全息中,重建声压  $p_z(x, y)$  和全息声压  $p_h(x, y)$  之间可以由格林函数联系起来<sup>[2]</sup>

$$p_z(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_h(x', y') G_D^{-1}(x-x', y-y', z_h-z) dx' dy', \quad (1)$$

式中,  $G_D$  为重建、全息声压之间的传播函数,即格林函数,  $G_D^{-1}$  为其逆函数。

式(1)是一个复杂的二维连续卷积积分方程,

基于规则阵列的平面 NAH 中,一个面上的空间域声压  $p(x, y)$  可以通过傅里叶变换转化为波数域角谱  $P(k_x, k_y)$ 。它们之间的关系如下:

$$p(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y P(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad (2)$$

$$P(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy p(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \quad (3)$$

将空间域转化到波数域,全息角谱  $P_h(k_x, k_y)$  和重建角谱  $P_z(k_x, k_y)$  将由波数域格林函数通过简单乘积关系联系起来。

$$P_z(k_x, k_y) = P_h(k_x, k_y) G_D^{-1}(k_x, k_y, z_h - z). \quad (4)$$

最后通过一个逆二维傅里叶变化,即可得到重建面声压。

$$p_z(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y [P_h(k_x, k_y) G_D^{-1}(k_x, k_y, z_h - z)] e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad (5)$$

式中,  $P_z(k_x, k_y)$  和  $P_h(k_x, k_y)$  为重建角谱和全息角谱,  $G_D^{-1}(k_x, k_y, z_h - z)$  为波数域格林函数,  $G_D^{-1}(k_x, k_y, z_h - z)$  为其逆函数。

$$G_D^{-1}(k_x, k_y, z_h - z) = e^{i\sqrt{k^2 - k_p^2}(z_h - z)}, \quad k_p^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (6)$$

从式中可知, 当  $k_x^2 + k_y^2 > k^2$  时,  $G_D^{-1}(k_x, k_y, z_h - z)$  随着全息测量距离的增大而呈指数形式衰减, 全息数据中的微小误差在逆向重建过程中将呈指数形式放大, 这是 NAH 中逆向重建解的不适定性问题的根源。

## 1.2 平面近场声全息重建模型与奇异值分解的联系

为了使用基于 SVD 的正则化方法, 需将平面 NAH 的重建过程转化为离散系统传递矩阵的表达形式。重建声压  $p_z$  和全息声压  $p_h$  的关系可以由一传递函数矩阵  $\mathbf{H}$  (称为系统矩阵) 联系起来<sup>[6]</sup>。

$$p_h = \mathbf{H}p_z, \quad (7)$$

系统矩阵  $\mathbf{H}$  包含有离散傅里叶算子  $\mathbf{F}$  和格林函数  $\mathbf{G}$ , 其表达形式为:

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{F}. \quad (8)$$

对应式 (5), 可写出  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{G}$  的离散表达式

$$\mathbf{F} \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-2\pi i(k-1)(q-1)/n}, \quad q = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$\mathbf{G} \equiv \text{diag}[\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{ij}, \dots], \quad (10)$$

式中:

$$\lambda_{ij} = e^{i\sqrt{k^2 - k_{pij}^2}(z - z_h)}, \quad k_{pij}^2 = k_{xi}^2 + k_{yj}^2 \quad (11)$$

式 (11) 表明, 系统矩阵离散傅里叶算子  $\mathbf{F}$  满足正交关系,  $\mathbf{F}^H\mathbf{F} = \mathbf{I}_M$ ,  $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}$ , 具有和奇异值分解左右单位正交矩阵同样的性质。

对应于 SVD 的各项:

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^H, \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^H$ , 分别为矩阵  $\mathbf{H}$  的左右单位正交矩阵, 具有  $\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{I}_M$ ,  $\mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{I}_M$  的重要关系,  $\mathbf{\Sigma}$  为单调递减的奇异值对角矩阵,  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ 。

对比式 (8) 和式 (12), 各项对应的关系为  $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{V}^H$ ,  $\mathbf{\Sigma}^2 = \mathbf{G}^H\mathbf{G}$ 。

由式 (11) 可知, 当  $k^2 < k_{pij}^2$ , 随着重建距离的增大, 系统矩阵  $\mathbf{H}$  的奇异值呈指数形式单调衰减, 造成  $\mathbf{H}$  为病态, 不能直接对  $\mathbf{H}$  求逆对式 (7) 求解。

这类离散不适定性问题的特点是<sup>[10]</sup>, 系统矩阵  $\mathbf{H}$  的奇异值  $\mathbf{G}$  逐渐衰减至零, 矩阵  $\mathbf{H}$  的条件数 (最大奇异值与最小奇异值的比值) 非常大。对于平面 NAH 的而言, 其系统矩阵  $\mathbf{H}$  条件数为:

$$\text{Cond}(\mathbf{H}) = e^{(z_h - z)\sqrt{(\pi/\Delta x)^2 + (\pi/\Delta y)^2 - k^2}}. \quad (13)$$

上式表明, 随重建距离  $z_h - z$  的增加, 条件数呈指数形式增加, 随采样间距减小或重建波数的降低呈增加趋势。

## 2 正则化

NAH 的重建过程属于病态逆问题。正则化可以提供一种基于本征值分解, 将 NAH 逆向重建中不适定性问题转化为适定性问题的方法, 其中 Tikhonov 正则化方法是最常用的一种方法。Tikhonov 正则化方法最早由 Kim 和 Ih<sup>[5]</sup> 于 1996 年引入至 NAH 的应用中, Williams<sup>[6]</sup> 在 2001 年将 Tikhonov 正则化方法与其它几种非 Tikhonov 正则化方法, Landweber 迭代法, 共轭梯度法 (Conjugate Gradient Approach) 及传统的指数形式的低通滤波器作了详细的对比。随后, Tikhonov 正则化方法在 NAH 中得到了广泛的应用<sup>[11-15]</sup>。下面我们对正则化问题中处于核心地位的 Tikhonov 正则化方法的原理和基本思想进行阐述, 随后介绍了用于判断离散病态最小二乘问题病态程度的离散 Picard 准则; 最后对三种最常用的基于 Tikhonov 正则化参数选择方法进行了解释并讨论了它们各自的优点及不足。

### 2.1 Tikhonov 正则化

假设全息测量声压  $\hat{p}_h$  中的误差为空间不相关的高斯噪声  $\varepsilon_p$ , 其方差为  $\tau^2$ 。则与重建声压  $\hat{p}_z$  有以下关系:

$$\hat{p}_h = \mathbf{H}\hat{p}_z, \quad \hat{p}_h = p_h + \varepsilon_p, \quad \text{var}[\hat{p}_h] = \tau^2, \quad (14)$$

式中,  $\text{var}$  表示方差。

标准 Tikhonov 正则化方法的基本思想是通过增加一个约束项, 使原来获得最小二乘解的病态方程  $\|\mathbf{H}\hat{p}_z - \hat{p}_h\|_2^2$  变成一个非病态方程。

$$J_\alpha(\hat{p}_z) = \|\mathbf{H}\hat{p}_z - \hat{p}_h\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{L}\hat{p}_z\|_2^2, \quad (15)$$

这里,  $\|\cdot\|_2$  表示向量的二次范数, 式中第二项是惩罚矩阵, 通常将矩阵  $\mathbf{L} = \mathbf{I}_M$  设为单位矩阵。  $\alpha$  ( $\alpha \geq 0$ ) 为正则化参数。

标准正则化方程 (15) 的解为一含有正则化参数  $\alpha$  的形式:

$$\hat{p}_z^\alpha = (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H\hat{p}_h, \quad (16)$$

或

$$\hat{p}_z^\alpha = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^\alpha \mathbf{G}_D^{-1} \mathbf{F} \hat{p}_h, \quad (17)$$

式 (17) 中,  $F^\alpha$  为带有正则化参数  $\alpha$  的低通滤波因子。

$$F^\alpha = \frac{|\sigma(k_x, k_y)|^2}{|\sigma(k_x, k_y)|^2 + \alpha}. \quad (18)$$

式 (18) 表明, 如果  $\alpha$  为零, 那么  $F^\alpha \equiv 1$ , 表示所有的波数成分都参与重建, 这样, 高波数的误差将被呈指数形式放大的逆格林函数  $G_D^{-1}$  严重放大, 使得重建结果变差甚至完全不可信。随着  $\alpha$  的增大,  $F^\alpha$  将滤除更多的高波数成分, 如果  $\alpha$  偏大, 那么  $F^\alpha$  将过多的滤除高波数成分, 重建解将比真实值要小。为了能得到具有物理意义的重建声压  $\hat{p}_z^\alpha$ , 关键在于选择合适的正则化参数  $\alpha$ 。

### 2.2 离散 Picard 准则

Hansen<sup>[10]</sup> 指出, 对于离散病态最小二乘问题, 当矩阵  $\mathbf{H}$  表示成广义奇异值分解 (Generalized Singular Value Decomposition, GSVD) 形式时, 只有当全息声压傅里叶系数  $|u_i^T \hat{p}_h|$  随奇异值项数  $i$  趋于零的速度在平均意义上大于矩阵  $\mathbf{H}$  的奇异值  $\sigma_i$  时, 正则化解才能保证近似等于真实解。这个条件称为离散 Picard 准则, 它是检验模型是否可以通过适当的正则化来求解的重要准则。对于一个给定的模型, 若其满足或部分满足 Picard 准则, 则可以通过适当的正则化方法来得到近似的解, 如果不满足 Picard 准则, 则无法使用正则化方法得到近似的解。

### 2.3 离差原理 (MDP) 法

MDP 法是属于第一类方法的一种正则化参数选择方法, 它的基本思想是如果知道噪声的方差  $\tau^2$ , 最佳正则化参数  $\alpha$  应该满足以下约束方程:

$$\|\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^\alpha) \mathbf{F} \hat{p}_h\|_2^2 = M\tau^2. \quad (19)$$

在平面 NAH 的实际应用中, 由图 1 所示, 我们可以利用全息角谱的噪声区域来快速估算噪声的方差<sup>[6]</sup>。利用 Parseval's 能量守恒原理, 也可以估计全息测量声压的信噪比 SNR。

$$\tau^2 \approx \|\mathbf{F}_q \hat{p}_h\|_2^2 / Q, \quad q \in \Omega \quad (20)$$

$$\text{SNR} = 10 \lg_{10} \frac{\|\mathbf{F} \hat{p}_h\|_2^2 - \|\mathbf{F}_q \hat{p}_h\|_2^2}{\|\mathbf{F}_q \hat{p}_h\|_2^2}, \quad (21)$$

式中,  $\Omega$  表示噪声区域, 即  $k_p = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} > \max(k_{x\max}, k_{y\max})$ ,  $Q$  是  $\Omega$  区内的数据个数。利用式 (20) 来预估噪声方差的前提是真实信号在噪声区域产生的高波数成分要足够小于由于噪声产生的高波数值。

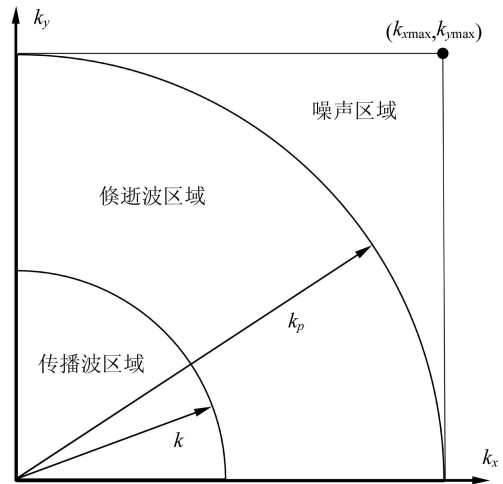


图 1 全息角谱 1/4 部分噪声区域示意图, 通过式 (20)、式 (21) 估计全息声压的噪声方差和 SNR。

### 2.4 广义交叉验证 (GCV) 法

GCV 法<sup>[10]</sup> 的基本思想是在一次全息重建过程中, 去掉一个全息测量点时 (或者说去掉式 (14) 中  $\hat{p}_h$  的一个分量), 由此产生的新模型的正则化解能够较好地预测被去掉的这个分量的值。对于标准 Tikhonov 正则化方法, GCV 函数的形式为<sup>[6]</sup>

$$J(\alpha) = \frac{\|\mathbf{H} \hat{p}_z^\alpha - \hat{p}_h\|_2^2}{[\text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{H} \mathbf{R}_\alpha)]} = \frac{\|(\mathbf{I} - \mathbf{F}^\alpha) \mathbf{F} \hat{p}_h\|_2^2}{[\text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^\alpha)]^2}, \quad (22)$$

式中,  $\text{Tr}$  表示矩阵的迹。当 GCV 函数达到极小值时, 就可以获得正则化参数  $\alpha$ 。

### 2.5 L 曲线 (L-curve) 法

L 曲线法是指残差范数  $\|\mathbf{H} \hat{p}_z^\alpha - \hat{p}_h\|_2$  和正则化解范数  $\|\hat{p}_z^\alpha\|_2$  的双对数坐标下的曲线图, 由于这条曲线形状类似字母 L 而得名。正则化参数  $\alpha$  位于 L 曲线的拐角处。定义  $\rho = \lg_{10} \|\mathbf{H} \hat{p}_z^\alpha - \hat{p}_h\|_2$ ,  $\xi = \lg_{10} \|\hat{p}_z^\alpha\|_2$ , 则 L 曲线的曲率函数为<sup>[8]</sup>:

$$\chi(\alpha) = 2 \frac{\rho' \xi'' - \rho'' \xi'}{[(\rho')^2 + (\xi')^2]^{3/2}}, \quad (23)$$

式中,  $\rho'$ ,  $\rho''$ ,  $\xi'$  和  $\xi''$  分别表示  $\rho$  和  $\xi$  的一阶和二阶导数。该曲率函数的最大值处即为 L 曲线正则化参数。

### 2.6 三种方法的比较及局限性分析

正则化方法在 NAH 中大量研究和应用表明: 目前还没有哪一种正则化方法公认是最好的。我们通过对不同 NAH 模型的大量数值仿真实验也发现, 这三种基于 Tikhonov 正则化的参数选择方法在不同条件下同样也没有绝对的优劣之分, 但是这三种方法之间还是具有一些可以比较的不同点和共同点。

(1) 从计算时间上来说, MDP 直接和方差建立联系, 只要测量或估计得到噪声的方差即可得到优化的正则化参数, 其计算速度最快。GCV 由于涉及到对矩阵的求迹运算, 其计算量随矩阵变大而增加。L 曲线由于需要插值来计算曲线的曲率, 计算量最大;

(2) 从物理和数学上来说, MDP 直接和噪声方差建立联系, 具有深刻的物理意义。GCV 具有严格的数学收敛性证明。L 曲线没有严格的收敛性证明;

(3) 从正则化参数的判断难易而言, MDP 只要得到噪声方差, 就有唯一的正则化参数和其对应, 判断最容易。GCV 函数有时候的最小值区域过分平坦, 此时难以确定最优参数。L 曲线有时候的形状和“L”形状相差较远, 对其“拐点”的判断非常困难;

(4) 从需要的噪声信息来说, MDP 需要预先知道 (或估计) 噪声的方差信息, 有时候噪声的方差难以获取或准确估计; GCV 和 L 曲线无需噪声的先验知识, 但如果数据中的噪声相关时, GCV 得到的正则化参数往往不正确<sup>[16]</sup>。

三种方法中, 利用 Parseval's 原理可知: MDP 约束方程 (19) 的左边项、GCV 函数 (22) 的分子项和 L 曲线中的残差范数  $\|H\hat{p}_z^o - \hat{p}_h\|_2$  的平方是相等的。MDP 中的这一项是和噪声的方差直接建立联系, GCV 函数和系统矩阵的迹有关系, L 曲线则和正则化解范数  $\|\hat{p}_z^o\|_2$  进行比较。由 MDP 法中约束方程 (19) 可知, 如果噪声方差估计不准, 则三者中的共有项  $\|H\hat{p}_z^o - \hat{p}_h\|_2^2$  将受其影响。对基于二维傅里叶变换的平面 NAH 而言, 全息声压中不但含有呈高斯分布 (波数域表现为均匀分布) 的背景噪声, 还涉及有限孔径的边缘截断, 全息角谱中不可避免的含有空间域加窗带来的吉布斯效应。如果高斯误差占主要作用 (SNR 低), 可以使用方程 (19) 来获得较好的正则化参数; 如果吉布斯效应占主要影响 (SNR 高), 方程 (19) 将不再适用。

上述对比分析表明: MDP 法具有运行速度快 (尤其对于大矩阵), 参数选择易判断这些 GCV、L 曲线法有所欠缺的优点。下面我们将对 MDP 法进行改进, 使之能适用于吉布斯效应占主要作用时的测量条件。

### 3 改进的 MDP 法 (Improved MDP, IMDP)

最常用的方法是在全息声压加一个平滑窗函数来减少边缘截断带来的吉布斯效应。众所周知, 矩形窗具有最窄的主瓣和最高的旁瓣, 即分辨率最高, 但

是其旁瓣最大; 常用的汉宁窗虽然具有较低的旁瓣, 能有效抑制吉布斯效应, 但是其主瓣较宽, 随之带来的是分辨率的下降<sup>[17]</sup>。有学者曾经使用折衷矩形窗和汉宁窗之间的 Tukey 窗有效地抑制了吉布斯效应<sup>[4]</sup>。对于同一个全息孔径而言, 如果测量得到的全息声压能量主要位于全息孔径的中央, 那么 Tukey 窗是一种很好的选择。为此付出的代价就是为了重建同样大小的声源区域, 需要增大全息孔径或减小全息距离, 这也是文献 4 里使用这种方法的前提。为了在同样全息孔径和全息距离的情况下, 获得更高的重建分辨率和重建有效区域, 本文将使用分辨率更高的矩形窗, 完全保留真实的测量全息声压, 从正则化的角度来降低吉布斯效应带来的重建误差。

#### 3.1 等效噪声方差估计

空间域加窗, 等价于波数域真实角谱卷积窗函数角谱, 由于边缘截断带来的吉布斯效应误差无法如高斯噪声那样用零均值和方差来表示其统计特性, 因此难以获得一个理论公式来完全消除这种误差<sup>[4]</sup>。通过大量的数值仿真实验, 我们发现, 可以通过定义由于有限离散带来的误差为一个等效噪声方差  $\tau_e^2$ , 从而使用和处理高斯噪声同样的方法来获得比较理想的解。由图 2 所示, 将图 1 重新划分成两个区域, 定义区域  $k_x^2 + k_y^2 \leq k_e^2$  为等效信号区域,  $k_x^2 + k_y^2 > k_e^2$  为等效噪声区域, 其中  $k_e$  ( $k_e > k$ ) 为等效噪声截止波数。由于在  $k_x^2 + k_y^2 > k$  区域, 逆格林函数  $G_D^{-1}$ , 即系统矩阵  $H$  的奇异值是单调下降的, 所以  $k_e$  能唯一对应一个奇异值  $\sigma_e$ 。现在要做的只是合理的选择  $\sigma_e$ , 使 MDP 能获得合理的正则化参数。

对于平面图像 (包括全息声压和重建声压) 而言, 大多数情况下都具有低波数分量很大, 随着波数增加, 其分量迅速变小的特点<sup>[9]</sup>。对于低噪声或

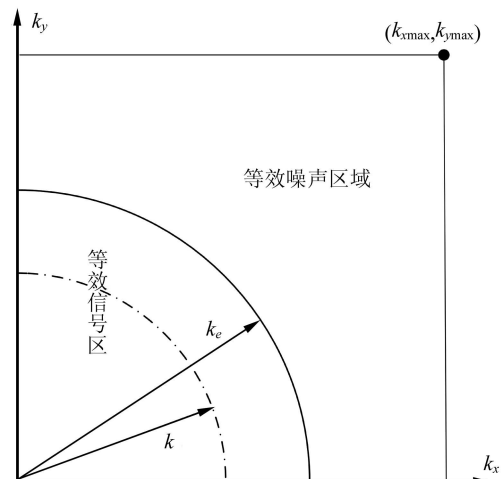


图 2 全息角谱 1/4 部分等效噪声区域示意图, 使用图中的等效噪声区域, 通过式 (20) 来估计等效噪声方差。

无噪声全息声压,其高波数区域误差主要是由边缘截断带来的能量泄露引起的,如果这些误差所对应的奇异值  $\sigma_i$  非常小,那么很小的误差就可能造成重建结果完全失败。为了获得可以接受的重建结果,如图 3 所示,我们选择全息声压傅里叶系数  $|u_i^T \hat{p}_h|$  第一个平均意义上开始不大于奇异值  $\sigma_i$  衰减的点  $\sigma_e$ (图中黑色三角形)对应的波数为等效噪声截止波数  $k_e$ ,大于  $k_e$  的部分即为等效噪声区域,小于  $k_e$  的部分为等效信号区域。同样使用式 (20),将噪声区域换成等效噪声区域,获得等效噪声方差  $\tau_e^2$ ,再利用 MDP 约束方程 (19),即可获得一个优化的正则化参数。

在一次 NAH 重建过程的 MDP 法正则化参数选择过程中,首先,我们使用式 (21) 估计得到全息声压的信噪比 SNR,当  $\text{SNR} \leq 15 \text{ dB}$  时,使用图 1 所示的噪声区域估计噪声的方差;当  $\text{SNR} > 15 \text{ dB}$  时,使用图 2 中的等效噪声区域来估计噪声的方差。图 4

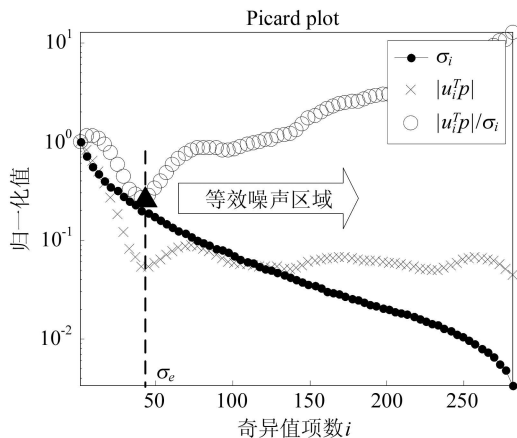


图 3 等效噪声截止波数  $k_e$  的选择示意图,图中  $\blacktriangle$  为傅里叶系数  $|u_i^T \hat{p}_h|$  第一个平均意义上开始不大于奇异值  $\sigma_i$  衰减的点  $\sigma_e$ 。

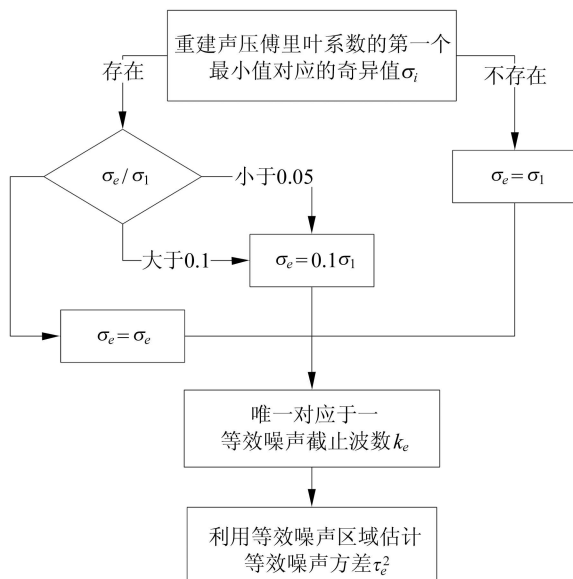


图 4 等效噪声方差  $\tau_e^2$  估计流程图

为等效噪声方差  $\tau_e^2$  的估计流程图,如图所示,在估计等效噪声方差的过程中,有可能会发生三种意外情况。第一种情况是全息声压傅里叶系数  $|u_i^T \hat{p}_h|$  自始至终均大于奇异值  $\sigma_i$  的衰减,即重建声压傅里叶系数  $|u_i^T \hat{p}_h|/\sigma_i$  没有最小值。此时已经不能满足节 2.2 中所述的 Picard 准则,虽然此时已得不到数学上很满意的解,但是仍可得到足以准确识别声源位置的解。为此目的,可令此类条件下的等效噪声奇异值  $\sigma_e = \sigma_1$ ,即认为大于传播波区域  $k_x^2 + k_y^2 > k$  以外的区域都是噪声区域。以此区域估计所得等效噪声方差在大多数情况下仍然可得到准确辨识声源位置的重建结果;第二种情况是,由于全息声压的不确定性及其卷积的复杂性,有可能在奇异值  $\sigma_i$  较小时出现第一个最小值。此时可限定一个合适的阈值以抑制这部分误差被小的奇异值放大,这里我们给出的阈值为 0.05,即当  $\sigma_e/\sigma_1 < 0.05$  时,令  $\sigma_e = 0.1\sigma_1$ 。最后还有一种情况是,当测量的距离非常近,系统矩阵的条件数比较小(病态不严重),虽然  $|u_i^T \hat{p}_h|$  也有起伏,在高信噪比环境下,保留高波数成分(同时也保留了高波数成分的误差)比滤除这些误差(同时也滤除了信号的真实高波数成分)具有更好的重建结果。此时同样可以设定一个阈值以获得好的重建结果,这里给出的阈值为 0.1,当  $\sigma_e/\sigma_1 > 0.1$  时,令  $\sigma_e = 0.1\sigma_1$ 。

### 4 数值仿真实验

#### 4.1 三种参数选择方法的比较

本节使用 MDP、GCV 和 L 曲线三种方法,结合离散 Picard 图分别比较不同 SNR、全息测量距离及声源频率条件下对重建结果精度的影响。使用常用的相对百分比均方误差来衡量重建声压与理论值的接近程度。

$$E^\alpha = \|p_z - \hat{p}_z^\alpha\| / \|p_z\| \times 100\%, \quad (24)$$

这里,  $p_z$  是真实的重建声压,  $\hat{p}_z^\alpha$  是含正则化参数的重建声压。改变正则化参数  $\alpha$  (通常的取值范围  $\sigma_n^2 \leq \alpha \leq \sigma_1^2$ ),可以得到与其对应的误差  $E^\alpha$ ,  $E^\alpha$  的最小值及其对应的  $\alpha$  我们称其为“最小”误差和“最佳”正则化参数。

下面仿真实验中用到的基本模型为:声源面位于  $z = 0$  的平面上,四个同样的点声源置于声源面上对称于原点 (0,0) 的四个位置 (12.5,12.5), (-12.5, 12.5), (12.5, -12.5), (-12.5, -12.5)cm 处,全息重建面为  $z = 1 \text{ cm}$ ,几何中心为原点 (0,0) 的全息测量面平行于声源面,全息距离为  $z_h(z_h > 1 \text{ cm})$ ,全息孔径为

71.875×71.875 cm, 采样间距均为 3.125 cm。使用该基本模型, 进行了以下的仿真实验。

仿真实验 1: 固定全息测量距离为 3 cm, 声源频率为 2 kHz, 改变 SNR 为无噪声、18 dB、12 dB、6 dB。此时模型的条件数不变, 约等于 16。

仿真实验 2: 声源频率为 2 kHz, SNR 为 15 dB, 改变全息测量距离为 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm。此模型的条件数随距离增加呈指数形式增加。

仿真实验 3: 全息距离为 5 cm, SNR 为 15 dB, 改变声源频率为 0.5 kHz, 1.0 kHz, 1.5 kHz, 2.0 kHz。此模型的条件数随声源频率的增加呈减小。

仿真实验 4: 为了验证上面对三种方法的局限性分析结论, 声源频率为 1 kHz, 无噪声, 改变全息测量距离为 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm。此模型的条件数随距离增加呈指数形式增加。

表 1—表 4 为仿真实验 1—4 的重建结果相对百分比误差与“最小”误差的比较, 同时也列出了相应的“最佳”正则化参数  $\alpha$ , 表中加粗斜体的数据表示较大的误差。图 5 和图 6 为仿真实验 2 和 4 的对应 Picard 图, Picard 图中横坐标表示奇异值的项数  $i$ , 纵坐标为归一化的相对比值, 这里使用傅里叶系数  $|u_i^T \hat{p}_h|$  和奇异值  $\sigma_i$  的第一项作为它们各自的基准值。

表 1 表明, 在全息距离很近时, 随着噪声的增大 (SNR 变小), 三种正则化方法能获得非常接近最小误差的重建解。在 SNR 为 6 dB 时, L-curve 得到的正则化解误差增大且不稳定。

表 2 和图 5 表明: 同样的 SNR 和声源频率下, 随着全息距离的增加, 奇异值的条件数迅速变大, 模型的传递函数矩阵变得更为病态, 然而, 傅里叶系数

表 1 不同 SNR 条件下 MDP、GCV 及 L-curve 重建声压百分比误差, 全息距离 3 cm, 声源频率 2 kHz, 此时条件数不变, 约为 16。

SNR(dB)	无噪声	18	12	6
“最小”误差 (%)	2.24	5.44	8.06	10.4
“最佳”	0.064	0.082	0.19	0.36
MDP (%)	2.24	5.45	8.22	10.6
对应 $\alpha$	0.064	0.069	0.15	0.33
GCV (%)	3.55	5.63	9.46	11.7
对应 $\alpha$	0.097	0.20	0.39	0.94
L-curve (%)	5.63	5.63	8.22	<b>27.4</b>
对应 $\alpha$	0.15	0.15	0.15	<b>0.081</b>

表 2 不同全息距离下 MDP、GCV 及 L-curve 重建声压百分比误差, SNR 15 dB, 声源频率 2 kHz。

全息距离 (cm)	3	5	7	9
条件数	16	243	3780	58889
“最小”误差 (%)	6.71	7.97	10.3	18.4
“最佳” $\alpha$	0.11	0.039	0.019	0.041
MDP (%)	6.88	8.23	17.3	<b>30.6</b>
对应 $\alpha$	0.12	0.041	0.010	<b>0.0050</b>
GCV (%)	7.79	8.21	18.5	<b>47.9</b>
对应 $\alpha$	0.27	0.036	0.0096	<b>0.0028</b>
L-curve (%)	6.93	<b>41.9</b>	<b>40.7</b>	<b>33.6</b>
对应 $\alpha$	0.15	<b>0.0053</b>	<b>0.0035</b>	<b>0.0045</b>

表 3 不同声源频率下 MDP、GCV 及 L-curve 重建声压百分比误差, SNR 15 dB, 全息距离 5 cm。

声源频率 (kHz)	0.5	1.0	1.5	2.0
条件数	291	281	265	243
“最小”误差 (%)	14.3	12.2	8.76	7.97
“最佳” $\alpha$	0.021	0.017	0.025	0.039
MDP (%)	17.0	15.5	8.93	8.23
对应 $\alpha$	0.049	0.029	0.029	0.041
GCV (%)	17.6	17.2	9.51	8.21
对应 $\alpha$	0.054	0.035	0.036	0.036
L-curve (%)	<b>36.8</b>	<b>20.9</b>	<b>34.3</b>	<b>41.9</b>
对应 $\alpha$	<b>0.0061</b>	<b>0.0092</b>	<b>0.0061</b>	<b>0.0053</b>

表 4 不同全息距离下 MDP、GCV、L-curve 及 IMPD 重建声压百分比误差, 无噪声, 声源频率 1 kHz。

全息距离 (cm)	3	5	7	9
条件数	17	281	4713	79020
“最小”误差 (%)	7.44	10.1	17.2	23.6
“最佳” $\alpha$	0.060	0.012	0.0060	0.0039
MDP (%)	7.44	<b>24.0</b>	<b>97.2</b>	<b>362</b>
对应 $\alpha$	0.060	<b>0.0036</b>	<b>2.1e-4</b>	<b>1.3e-5</b>
GCV (%)	9.71	<b>24.0</b>	<b>97.2</b>	<b>362</b>
对应 $\alpha$	0.075	<b>0.0036</b>	<b>2.1e-4</b>	<b>1.3e-5</b>
L-curve (%)	<b>33.0</b>	<b>33.6</b>	<b>17.8</b>	<b>50.9</b>
对应 $\alpha$	<b>0.39</b>	<b>0.15</b>	<b>0.0057</b>	<b>9.6e-4</b>
IMDP (%)	7.44	12.7	19.8	24.3
对应 $\alpha$	0.060	0.019	0.010	0.0050

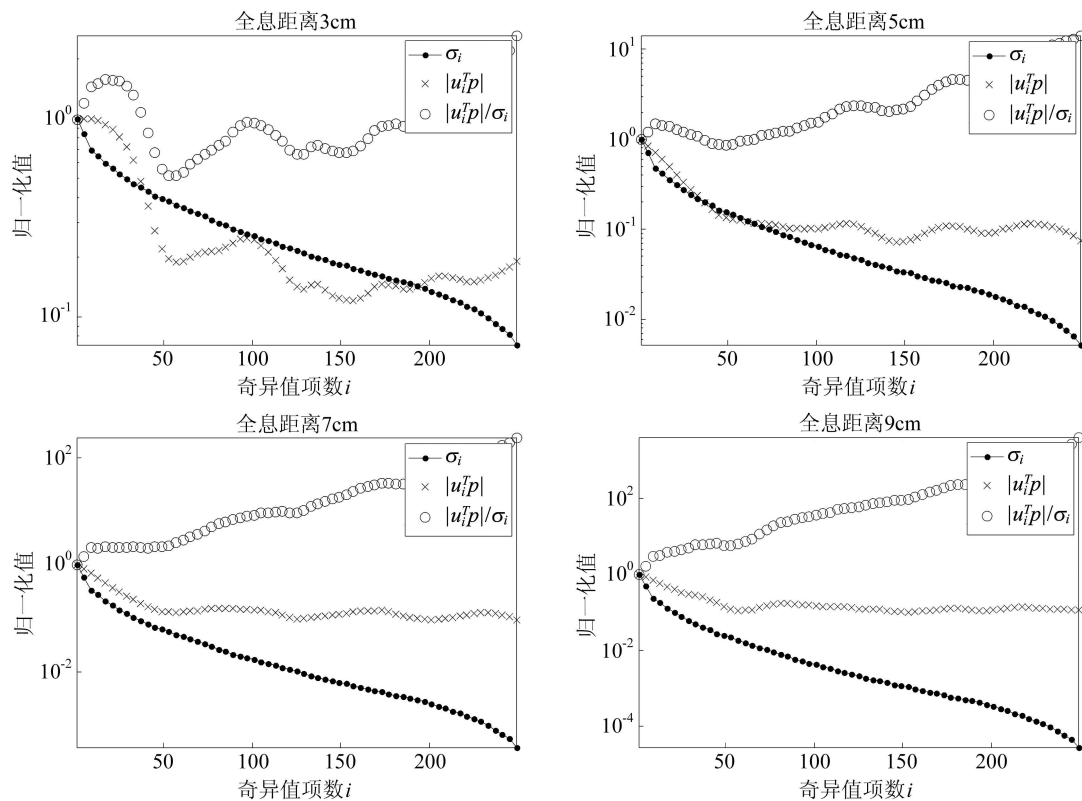


图 5 不同全息距离下离散 Picard 图, SNR 15 dB, 声源频率 2 kHz。

的衰减变化不是很大, 满足 Picard 条件的正则化参数区域迅速减小。从 5 cm 开始, L-curve 法就开始出现不稳定的且误差较大的解, 在 7 cm 和 9 cm 条件下, 三种方法的重建误差均比“最小”误差大很多。7 cm 和 9 cm 的离散 Picard 图表明, 平均意义上, 傅里叶系数的下降速度几乎在全部范围内都不大于奇异值的下降速度。此时, “最小”误差本身就比较大, 即通过 Tikhonov 正则化方法已经无法获得较好的近似解, 对待此类问题, 最好的办法是从测量上来避免系统矩阵的严重病态, 根据式 (13) 可知, 减小全息距离是最有效的方法。

表 3 结果表明, 在同样的条件下, 随着重建声源的频率 (或波数) 的增加, 条件数呈减小趋势, MDP

和 GCV 能得到合适的正则化解, L-curve 获得不适合且很不稳定的解, 这是由于此时 L-curve 不像“L”形状, 寻找合适的拐点将变得很困难。

和图 5 一样, 图 6 中模型的病态随全息距离的增加而加重。和图 5 不一样的是, 由于该模型没有加入噪声, 因此在 7 cm 和 9 cm 的 Picard 图中仍然具有满足 Picard 条件的区间, 按照前述的 Picard 准则可知, 此类问题可以通过适当的正则化方法来得到好的正则化解, 可是表 4 的结果表明, 除了全息距离为 3 cm 的时候, MDP 和 GCV 能得到好的结果, 随着距离的增大, 正则化解的误差迅速增大至完全不可信, 即基于 Tikhonov 正则化的三种参数选择方法在较低噪声、较远全息距离条件下将失效, 这和



上面对三种方法的局限性分析结论一致。

### 4.2 改进前后 MDP 法的比较

使用 IMDP 重复仿真实验 4, 结果 (表 4 最后一行) 表明, IMDP 法在无噪声、相对较远全息距离条

件下获得了很接近最小均方误差的正则化解。为进一步验证 IMDP 的稳定性, 图 7 比较了不同全息距离下信噪比从 10 dB 至 60 dB 环境下四种方法的重建误差结果。由图可知: 在 SNR 大于 20 dB 后, 最小误差趋于不变; GCV 和 MDP 除了在 3 cm 处能找

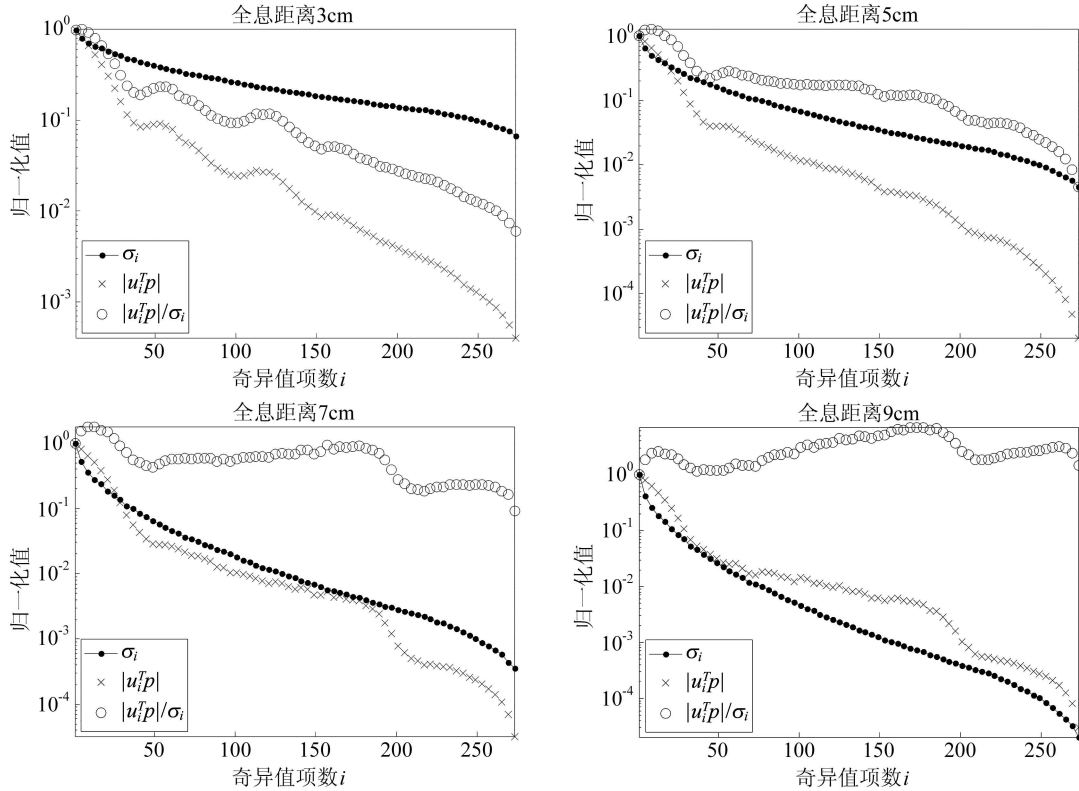


图 6 不同全息距离下离散 Picard 图, 无噪声, 声源频率 1 kHz。

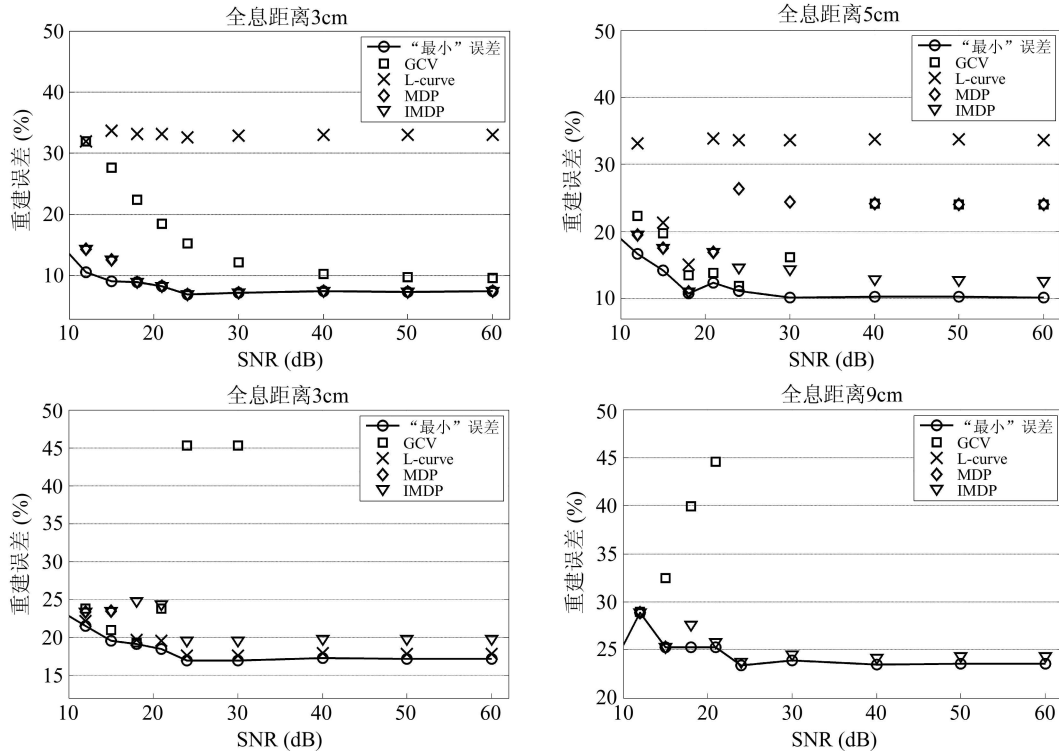


图 7 不同信噪比及全息距离条件下各种方法重建百分比误差比较, 只显示了误差小于 50% 的结果。

到可以接受的解以外,随着全息距离的增加,其误差迅速增大;虽然 L-curve 法在 7 cm 时,重建误差一直在这四种方法里面最小,但是其重建解随模型条件的改变(全息距离、声源频率及分布等的改变)极不稳定;IMDP 法一直能非常稳定地获得接近最小误差的解。

## 5 结论

本文使用基于 Tikhonov 正则化的三种参数选择方法,即离差原理法(MDP)、广义交叉验证法(GCV)、L 曲线法(L-curve),结合 Picard 准则,对平面近场声全息中的不同声源频率、全息距离及信噪比的重建结果进行了对比分析,得到以下结论:

(1) 只要全息阵列满足采样定律,保证有足够多的测量点满足统计的需要,三种方法对声源频率的改变都不敏感;(2) 随着全息距离的增加,系统矩阵的条件数迅速变大,满足 Picard 条件下的参数区域逐渐变小,三种方法获得的正则化参数只要偏离这个区域过远,重建百分比误差将变得很大,但是在一些有偏离的情况下,依然能寻到很好的正则化参数;(3) 在较低噪声时,随着全息距离的增大,三种方法均得不到合适的正则化参数。

三种方法在较低噪声、较远全息距离情况下的失效是由于有限边缘截断带来的吉布斯效应误差而引起的。虽然通过全息面加平滑窗可以有效减少边缘截断带来的吉布斯效应,但是为此声源识别的分辨率将会降低,且需要大的全息孔径。为了在不改变测量孔径和全息间距的情况下,而获得最高的重建分辨率和重建有效区域,本文使用分辨率最高的矩形窗,完全保留真实的测量全息声压。使用三种方法中较为鲁棒的离差原理,基于平面图像大多数情况下能量集中在低波数成分的事实,提出了一种等效噪声方差的估计方法,将吉布斯效应引起的误差等效于高斯噪声的方差,同样使用离差原理去获取正则化参数。数值仿真实验的结果表明,使用改进后的离差原理法(IMDP),可以在很宽的信噪比区域( $\text{SNR} > 6 \text{ dB}$ ),相对较远的全息距离( $\sim 10 \text{ cm}$ )测量条件下,稳定、快速地重建出与全息孔径相等的有效重建孔径上的声学量。

## 参 考 文 献

- Williams E G, Maynard J D. Holographic imaging without the wavelength resolution limit. *Phys. Rev. Lett.*, 1980; **45**: 554—557
- Maynard J D, Williams E G, Lee Y. Nearfield acoustic holography: I. Theory of generalized holography and the development of NAH. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1985; **78**(4): 1395—1413
- Veronesi W A, Maynard J D. Near-field acoustic holography (NAH): II. holography reconstruction algorithms and computer complementation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1987; **81**(5): 1307—1322
- Williams E G. *Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. London: Academic Press, 1999
- Kim B K, Ih J G. On the reconstruction of the vibroacoustic field over the surface enclosing an interior space using the boundary element method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1996; **100**(5): 3003—3016
- Williams E G. Regularization methods for near-field acoustical holography. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2001; **110**(4): 1976—1988
- Golub G H, Heath M, Wahba G. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 1979; **21**(2): 215—222
- Hansen P C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Review*, 1992; **34**(4): 561—580
- 川又政征等. *多维数字信号处理*. 北京: 科学出版社, 2003: 49
- Hansen P C. Regularization tools: A matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. *Numer. Algorithms*, 1994; **6**: 1—35
- Wu S F, Zhao X. Combined Helmholtz equation-least squares method for reconstructing acoustic radiation from arbitrarily shaped objects. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2002; **112**(1): 179—188
- Williams E G, Houston B H. Fast Fourier transform and singular value decomposition formulations for patch nearfield acoustical holography. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2003; **114**(3): 1322—1333
- Cho Y T, Bolton J S. Source visualization by using statistically optimized near-field acoustical holography in cylindrical coordinates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2005; **118**(4): 2355—2364
- Lu H C, Wu S F. Reconstruction of vibroacoustic responses of a highly nonspherical structure using Helmholtz equation least-squares method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2009; **125**(3): 1538—1548
- Gomes J, Hald J, Juhl P. On the applicability of the spherical wave expansion with a single origin for near-field acoustical holography. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2009; **125**(3): 1529—1537
- Hansen P C. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1993; **14**(6): 1487—1503
- Oppenheim A V, Schaffer R W, Buck J R, 刘树棠, 黄建国. *离散时间信号处理*. 西安: 西安交通大学出版社, 2002: 373—378