

边界积分方程法求解目标的声散射 T 矩阵

高 华^{1,2} 徐海亭²

(1 中国科学院声学所声场声信息国家重点实验室 北京 100190)

(2 中国科学院声学所北海研究站 青岛 266023)

2007 年 7 月 26 日收到

2008 年 4 月 9 日定稿

摘要 提出了计算任意表面形状刚性边界目标散射的基于边界积分方程的 T 矩阵方法 (TMM-BIE)。利用 Helmholtz 积分方程法 (HIEM) 计算目标表面声场, 替代扩展边界法 (EBCM) 计算中对目标表面声场的近似处理, 解决了扩展边界法不能计算任意形状目标的散射 T 矩阵问题。文中计算了刚性边界的球目标、有限长圆柱目标以及非对称的三维散射体——猫眼 (cat's-eye) 模型的散射指向性和 T 矩阵。通过与解析解和 HIEM 结果比较, 证明该方法的有效性。

PACS 数: 43.30

Computing T matrix of sound scattering by object using the boundary integral equation method

GAO Hua^{1,2} XU Haiting²

(1 *National Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences* Beijing 100190)

(2 *Qingdao Acoustics Laboratory, Chinese Academy of Sciences* Qingdao 266023)

Received Jul. 26, 2007

Revised Apr. 9, 2008

Abstract A T matrix method based on the boundary integral equation (TMM-BIE) is presented for calculating sound scattering by an arbitrary shape rigid object. In this method, the Helmholtz integral equation method (HIEM) is used to calculate the sound pressure on the surface of object instead of the superposition form of basis functions on the surface in the extended boundary condition method (EBCM). The problems in calculating T matrix of large aspect ratios and arbitrary shape object by EBCM are solved. The method is proved by comparison of the calculation results of this method and theoretical results or HIEM to calculate the scattering by a rigid sphere, a rigid finite-cylinder, a cat's-eye structure.

引言

随着现代低频声呐的发展, 研究目标低频声散射特性, 对声呐设计有重要意义。简正波法是研究低频声波动理论的常用方法, 通过选取相互正交的简正波特征基函数可以构建一个以特征基函数为基底的线性空间, 特征基函数的权系数为声场在该线性空间中的坐标。通过求解目标散射声场在此线性空间中的坐标, 可以为目标低频散射机理和目标识别提供理论分析依据。

T 矩阵方法被广泛用于计算声波、电磁波和弹性波等散射问题。该方法最初为 P.C. Waterman^[1-2] 发展用于计算电磁波散射。 T 矩阵指出了散射体对不

同模式波的耦合作用, 可以直接用于求解散射声场的简正波权系数。Waterman 采用扩展边界的方法 (EBCM), 将入射声场、散射声场和散射体表面声场都用球谐波函数来展开, 所以随着散射体纵横比的增加, T 矩阵法的收敛速度很快降低, 同时, 误差也很快变成一个严重问题; T 矩阵法的数值难度随着模式数的增加而增加, 与模式相关的需要求逆的矩阵随模式数增加而变得愈来愈病态^[3]。对于大纵横比的目标的散射问题, Hackman^[4-5] 发展了在椭球坐标下的 T -matrix, 较好的解决了大纵横比时误差问题, 但文章中依然应用 Waterman 对基函数在目标表面的完备性假设, 对表面声场采用了椭球基函数展开, 所以仍然只适合近似规则散射体; 并且由于选取的基

函数不同, 不利于各种散射体散射能力的对比。

文章中提出了一种求解任意形状刚性边界散射体散射的基于边界积分方程的 T 矩阵方法。这种方法利用 Helmholtz 积分方程法 (HIEM)^[6-10] 求解散射体表面声场, 代替基函数叠加形式, 然后采用表面离散数值积分技术, 对散射体表面进行数值积分求出 T 矩阵。

1 基于 EBCM 的 T 矩阵法

如图 1 所示, 假设在均匀无限介质中, 波数为 k 的平面波入射到刚性散射体, S 为散射体和介质的交界面, S_+ 和 S_- 分别为目标的内接球面和外包球面。

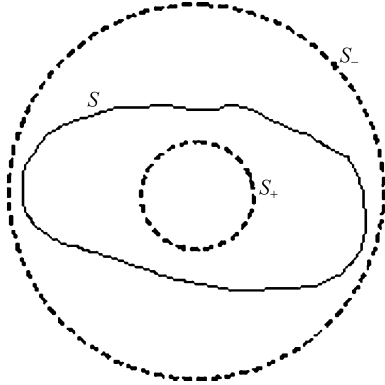


图 1 目标及围面示意图

声场满足 Helmholtz 积分公式:

$$p_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \oint_S p(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G(kR) d\sigma = p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in M \quad (1a)$$

$$= \frac{1}{2} p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S \quad (1b)$$

$$= 0, \quad \mathbf{r} \in B \quad (1c)$$

式中 p_i 为入射平面波, p 为总声场, $\hat{\mathbf{n}}$ 为 S 上 \mathbf{r}' 处的外法向单位矢量, G 是 Green 函数, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。

$$G(kR) = \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (2)$$

在散射体附近区域, 入射波没有奇异性, 因此可以表示:

$$p_i = \sum a_n \operatorname{Re} \psi_n(kr), \quad (3)$$

$\{\psi_n; n = 1, 2, \dots\}$ 为满足波动方程的基函数系。

散射声场可以表示为:

$$p_s = \sum f_n \psi_n(kr). \quad (4)$$

在 S_- 以外的区域 Green 函数满足如下形式:

$$G(kR) = ik \sum \psi_n(kr_>) \operatorname{Re} \psi_n(kr_<), \quad (5)$$

$r_>$ 为 S_- 以外的场点, $r_<$ 为以 S_+ 内的场点。

将式 (4) 和式 (5) 代入式 (1a) 后得到:

$$p_s(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) - p_i(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \sum \psi_n(kr) \oint_S p(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla [\operatorname{Re} \psi_n(kr')] d\sigma, \quad (6)$$

$$f_n = \frac{ik}{4\pi} \oint_S p(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \operatorname{Re} \psi_n(kr') d\sigma.$$

将式 (3) 和式 (5) 代入式 (1c) 后得到:

$$\sum a_n \operatorname{Re} \psi_n(kr) = -\frac{ik}{4\pi} \sum \operatorname{Re} \psi_n(kr) \oint_S p(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla [\psi_n(kr')] d\sigma, \quad (7)$$

$$a_n = -\frac{ik}{4\pi} \oint_S p(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_n(kr') d\sigma.$$

假设基函数 $\{\psi_n; n = 1, 2, \dots\}$ 在散射体表面满足完备性, 可以得到散射体表面声场:

$$p(\mathbf{r}') = \sum b_n \operatorname{Re} \psi_n(kr'), \quad \mathbf{r}' \in S \quad (8)$$

由式 (6)–(8) 可得:

$$\mathbf{f} = -\operatorname{Re}(\mathbf{Q})\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a},$$

$$Q_{nm} = \frac{k}{4\pi} \oint_S d\sigma \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_n(kr') \cdot \operatorname{Re} \psi_m(kr'), \quad (9)$$

式中 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$, $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T$ 。

根据式 (9) 可知基于 EBCM 的 T 矩阵公式为:

$$\mathbf{T} = -\operatorname{Re}(\mathbf{Q})\mathbf{Q}^{-1}. \quad (10)$$

该公式基于式 (8) 的假设条件, 因此要求基函数和散射体外形匹配才可以得到准确结果。

2 基于边界积分方程的 T 矩阵法

通过求解 Helmholtz 边界积分方程, 即 (1b) 式, 能够精确的得到任意形状散射体的表面声场。因此可以避免基函数在散射体表面满足完备性假设, 提高 T 矩阵的计算精度。

2.1 Helmholtz 积分方程法求解表面声场

Helmholtz 积分方程法 (HIEM) 应用式 (1b) 求出 $p(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in S$, 与入射声场 p_i 的关系。对目标表面离散化, 设 S 被离散为 M 个面元, 第 α 片面元面积为 A_α , 中心位置为 \mathbf{r}_α , 得到线性方程组:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}_i, \quad (13)$$

式中 $\mathbf{p} = [p(\mathbf{r}_1), p(\mathbf{r}_2), \dots, p(\mathbf{r}_M)]^T$ 。

$$H_{\alpha\beta} = -A_\beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_\alpha G, \quad \alpha \neq \beta, \quad (14a)$$

$$H_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} - \int_{A_\alpha} \hat{\mathbf{n}}_\alpha \cdot \nabla_\alpha G d\sigma, \quad \alpha, \beta \in [1, M] \quad (14b)$$

式中 Green 函数采用式 (2) 形式。

将式 (3) 带入式 (13), 得到表面声场与入射声场的关系式:

$$\mathbf{p} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{a}, \quad (15)$$

式中 $\mathbf{\Psi}_{\alpha n} = \text{Re } \psi_n(\mathbf{r}_\alpha)$, $n \in [1, N]$ 。

2.2 T 矩阵计算公式

在三维无限区域中, 选取球坐标系中基函数:

$$\psi_{qnm}(k\mathbf{r}) = h_n^{(1)}(kr)Y_{qnm}(\theta, \phi), \quad (16)$$

$$Y_{qnm}(\theta, \phi) = \begin{cases} e_m \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \\ \begin{cases} \cos m\phi, & q = e, \\ \sin m\phi, & q = o, \end{cases} \end{cases} \quad (17)$$

式中 $n = 0, 1, 2 \dots, m = 0, 1, 2 \dots, n$ 。

对式 (6) 离散化, 变为:

$$\mathbf{f} = \mathbf{\Psi}' \cdot \mathbf{p}, \quad (18)$$

$$\psi'_{n\alpha} = \frac{ik}{4\pi} A_\alpha \nabla_\alpha j_n(kr_\alpha) Y_{qnm}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) \cdot \hat{\mathbf{n}}_\alpha. \quad (19)$$

由式 (15) 和式 (18) 可以得到:

$$\mathbf{f} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}, \quad (20)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Psi}' \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{\Psi}, \quad (21)$$

式 (21) 即为基于表面积分方程的 T 矩阵求解公式。

3 数值计算

为了验证 TMM-BIE 的正确性, 计算了刚性边界的球体、有限长圆柱体, 猫眼 (cat's-eye) 和较为接近实际目标的潜艇模型四种散射体模型的散射 T 矩阵和收发分置散射远场指向性。

入射声为沿 z 轴负向入射的单位平面波时, 其球谐函数展开为:

$$p_i = \sum_{n=0}^{\infty} A_n j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (22)$$

其中 $A_n = (2n+1)(-i)^n j_n(ka)$ 。

3.1 球体目标的散射

球体目标散射有严格的理论解, 是验证算法的基本目标。计算的球体目标为半径 1 m 的刚性球体, 划分元素数目为 642 个。坐标原点位于球心处。

刚性球体散射的解析解为:

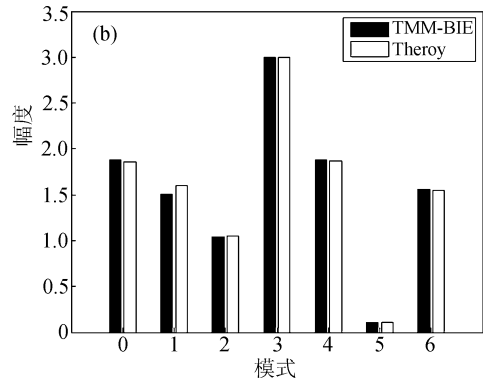
$$p_s = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos \theta) h_n^{(1)}(kr), \quad (23)$$

散射波系数为:

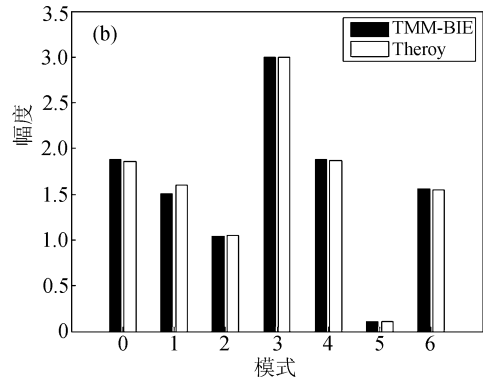
$$B_n = -(2n+1)(-i)^n \frac{j'_n(ka)}{h_n^{(1)'}(ka)}$$

图 2 是频率为 1000 Hz 时 TMM-BIE 计算出的散射波系数 f_{n0} 和解析解 B_n 的比较。结果表明数值结果与解析解基本一致。

图 3 是球目标 1000 Hz 时的收发分置散射指向性图, 横轴表示的是与 z 轴的夹角。TMM-BIE 计算结果为子波数 (NPW) 为 $7(n \in [0, 6])$ 时的计算结果。由图可知 HIEM 和 TMM-BIE 两种数值方法结果相同, 与理论结果相比, 在入射反向 0° 附近相差约 1 dB; TMM 计算结果为 NPW 分别取 8, 9, 10 时的情况。TMM 的计算结果在 NPW=8 时与理论结果最为接近; NPW=9 时在 0° 附近出现了 2 dB 的偏移; 当 NPW=10 时, TMM 结果完全错误。可以看出即使对球性散射体, TMM 也不具备数值稳定



(a) 幅度



(b) 相位

图 2 1000 Hz 时散射波系数的 T 矩阵解与理论解对比

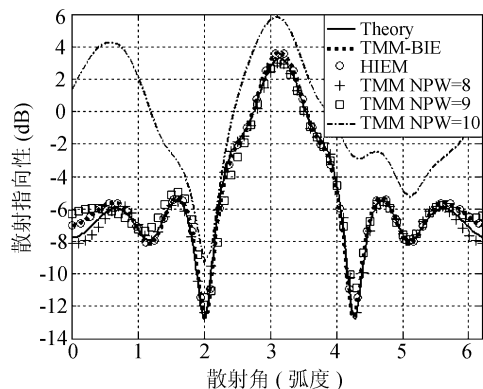


图 3 1000 Hz 球目标散射指向性

性。这是由于式 (10) 中的矩阵 Q 随 NPW 增大越来越病态所致。

图 4 显示的是 TMM-BIE 计算的 $n \in [0,6]$ 和 $m \in [0,4]$ 模式按对角线元素归一化后的 T 矩阵。图中坐标显示的是式 (17) 中 m 模式的阶数, 前 $[0,4]$ 为 $q = e$ 的模式, 后 $[1,4]$ 为 $q = o$ 模式。两坐标之间为 m 值固定矩阵随 n 值 ($n \in [m,6]$) 的情况。图中显示球目标 T 矩阵的结果与理论预测一致, 为一对角矩阵, 表明球目标只能产生与入射波相同模式的散射波。非对角线上的元素应为数据离散后产生的积分误差; 误差随 m 阶数的增大而增加, 这是由于 m 模式的周期随 m 增加而减小, 模型离散数据已不能满足该周期条件下的精度。

3.2 有限长圆柱目标的散射

如图 5 有限长圆柱模型的半径为 0.5 m, 长度为 5 m, 纵横比为 5:1。模型划分元素数目为 3802 个。目标轴向与 z 轴重合。

图 6 和图 7 分别为 TMM-BIE、HIEM 和 TMM 方法计算的 500 Hz 和 1000 Hz 时有限长圆柱散射指向性对比图, 横轴表示的是与 z 轴的夹角。从图中可以看出前两种结果完全一致, 证明 TMM-BIE 求解方法虽然应用了球谐函数为基函数, 对于大纵横比目标依然适用, 并且保证了精度要求。而 TMM 法在不同的 NPW 取值时, 计算出的结果有很大的差异, 图 6 中 NPW=6 时和图 7 中 NPW=9 时, TMM 计算结果与另外两个结果有相同的趋势, 当 NPW 增加时 TMM 计算结果显示出了更大的差异。

表 1 给出了 TMM 方法在 NPW 不同取值时计

表 1 TMM 计算的有限长圆柱模型散射指向性。NPW 为计算取的子波数, CN_o 为矩阵 Q 的条件数。

NPW	CN_o	0° (dB)	90° (dB)	180° (dB)	NPW	CN_o	0° (dB)	90° (dB)	180° (dB)
6	2.58	-9.6	-27.6	-7.6	7	3.34	2.5	-9.2	3.8
7	7.34	-15.8	-17.3	-21.3	8	3.44	4.9	-6.8	2.4
8	1648	-14.4	8.5	-8.6	9	24.52	-7.2	-10.4	1.9
9	7.39×10^5	19.2	38.3	17.5	10	2327	1.5	-4.2	1.1

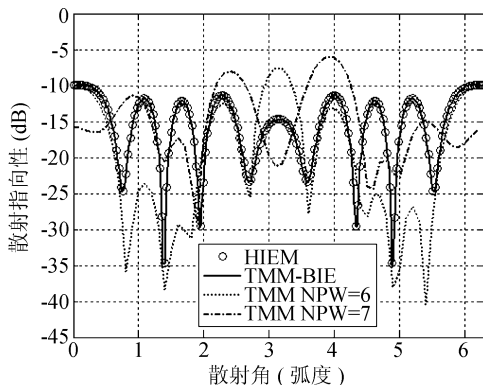


图 6 500 Hz 有限长圆柱目标散射指向性

算出的在 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ 散射声强度, 并给出了式 (9) 中矩阵 Q 的条件数:

$$CN_o = N(Q)N(Q^{-1}). \tag{24}$$

$N(Q)$ 为矩阵 Q 的 2-范数。条件数指出了矩阵 Q 的奇异性, 条件数越大矩阵越病态, 微小误差引起的

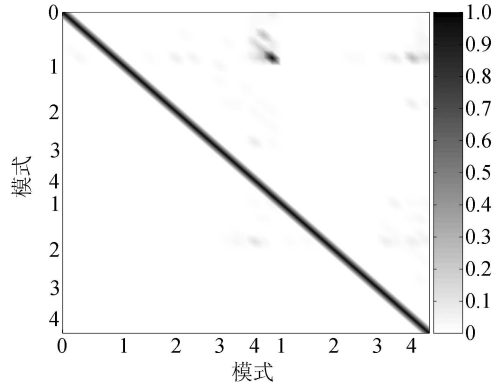


图 4 1000 Hz 球目标散射归一化 T 矩阵。 n 取值范围 $[0,6]$ 和 m 取值范围 $[0,4]$ 。显示坐标为 m 模式的阶数, 前 $[0,4]$ 为 $q = e$ 的模式, 后 $[1,4]$ 为 $q = o$ 模式。两坐标之间为 m 值固定矩阵随 n 值 ($[m,6]$) 的情况。

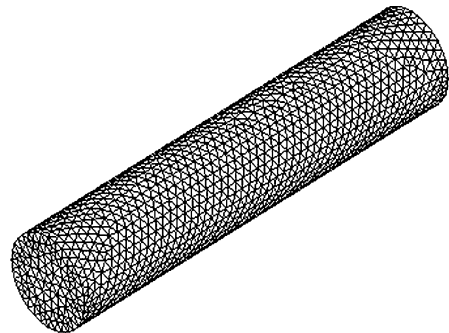


图 5 有限长圆柱模型

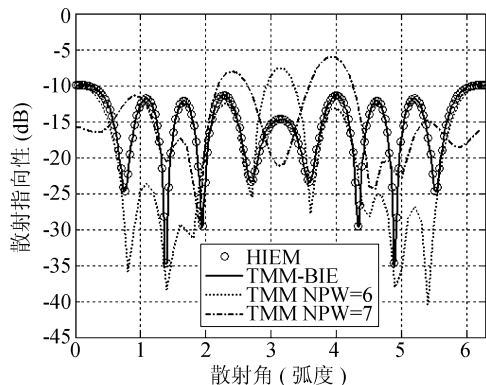


图 7 1000 Hz 有限长圆柱目标散射指向性

解的失真越大。从表 1 中可以看出当 NPW 超过某一值时, CN_o 会急剧增大。500 Hz 时 NPW 由 7 到 8 时, CN_o 由 10 以下增加到 10^3 量级 1000 Hz 时 NPW 由 9 到 10 时, CN_o 由 10^1 到 10^3 量级, 伴随着 CN_o 的增加, 散射声场的解表现出了发散趋势。在 CN_o 没有剧烈增长前, 计算结果也表现出了不稳定的特点, 散射强度随 NPW 呈现较大幅度震荡变化。

图 8 和图 9 是 TMM-BIE 计算的 500 Hz 和 1000 Hz 频率时的归一化 T 矩阵, 显示模式范围 $n \in [0, 10]$ 和 $m \in [0, 4]$ 。如图所示, 有限长圆柱目标的 T 矩阵近似于带状矩阵。图 8 中, 500 Hz 时只表现出了对 $m < 4$ 阶模式的响应, 在 $m = 3$ 时随着 n 的增大散射波的相应的 T 矩阵值就开始降低; 当散射波 m 模式与入射波 m 模式不相同, 矩阵元素值为零, 这与目标的轴对称特征相符; 当 m 模式相同时, 有限长圆柱对不同 n 模式有耦合作用。图 9 中 1000 Hz 的 T 矩阵有相同的特征, 但频率升高后对离散数据要求提高, m 增大后有明显的误差出现。

3.3 猫眼模型的散射

猫眼模型是一种非轴对称的凹面体结构, 凹陷处对声波有多次散射作用。如图 10 所示, 猫眼模型

由半径为 1 m 球体切除 1/8 得到, 切除部分是位于 $x < 0, y < 0, z > 0$ 区域的部分。模型划分元素数目为 642 个。

从图 11 和图 12 中可以看出 TMM-BIE 和 HIEM 计算结果完全一致, 证明 TMM-BIE 求解方法对三维非轴对称的凹面体目标依然适用, 并且保证了精度要求。而 TMM 法在不同的 NPW 取值时, 散射强度呈现震荡变化, 与 TMM-BIE 和 HIEM 计算结果相比, 也无相近的趋势。

图 13 和图 14 是 TMM-BIE 计算的猫眼模型 500 Hz 和 1000 Hz 频率时的归一化 T 矩阵, 显示模式范围 $n \in [0, 10]$ 和 $m \in [0, 3]$ 。猫眼模型表现出

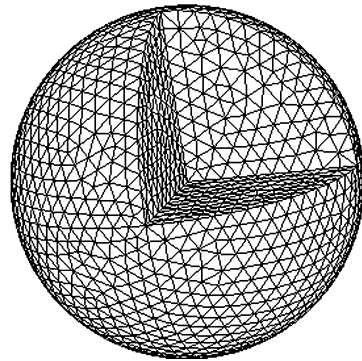


图 10 猫眼模型为球体切除 $x < 0, y < 0, z > 0$ 的球体部分得到。

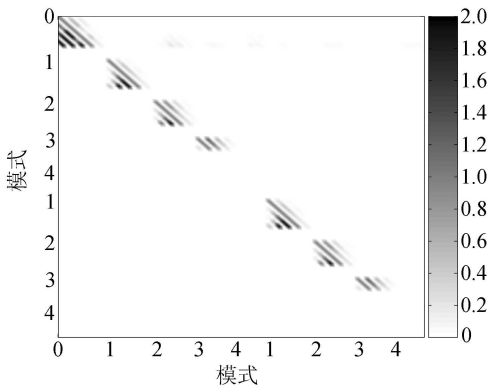


图 8 500 Hz 有限圆柱目标散射归一化 T 矩阵。 n 取值范围 $[0, 10]$ 和 m 取值范围 $[0, 4]$ 。坐标设置与图 4 相同。

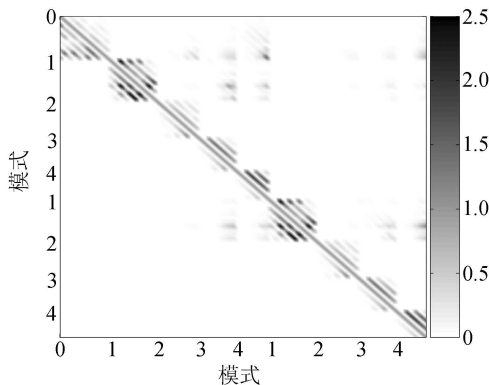


图 9 1000 Hz 有限圆柱目标散射归一化 T 矩阵 n 取值范围 $[0, 10]$ 和 m 取值范围 $[0, 4]$ 。坐标设置与图 4 相同。

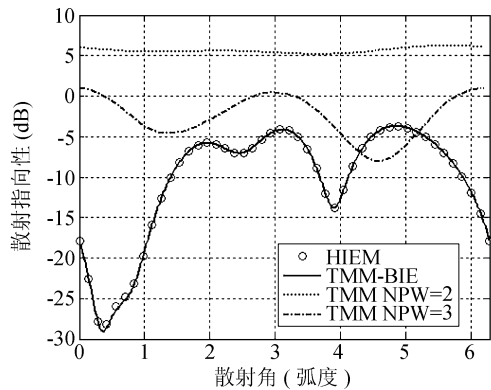


图 11 500 Hz 猫眼目标散射指向性

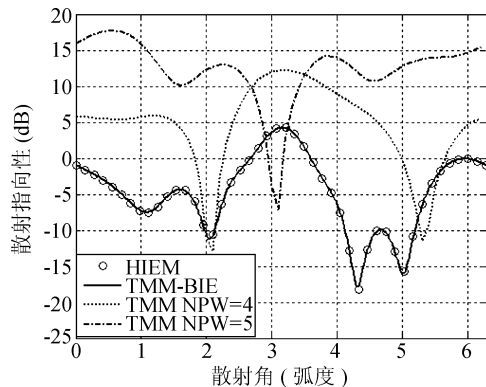


图 12 1000 Hz 猫眼目标散射指向性

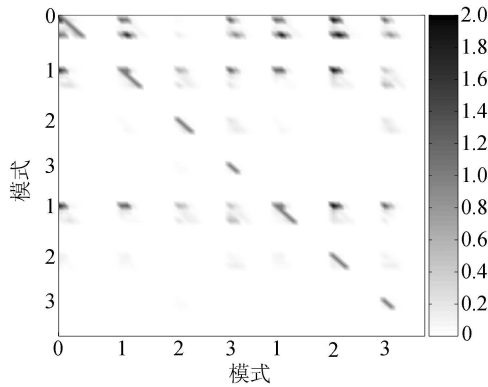


图 13 500 Hz 有限圆柱目标散射归一化 T 矩阵。 n 取值范围 $[0,10]$ 和 m 取值范围 $[0,3]$ 。坐标设置与图 4 相同。

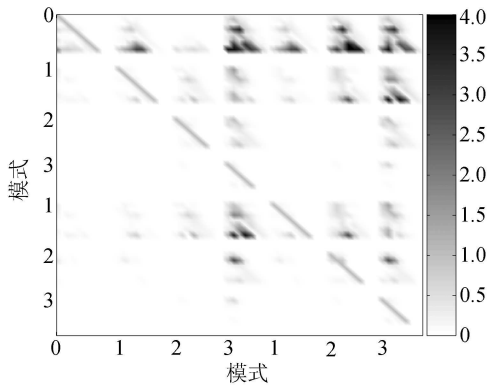


图 14 1000 Hz 有限圆柱目标散射归一化 T 矩阵。 n 取值范围 $[0,10]$ 和 m 取值范围 $[0,3]$ 。坐标设置与图 4 相同。

了前两种模型没有的 m 模式耦合作用。在图 13 中, 500 Hz 时的 T 矩阵显示出猫眼模型柱目标能将任意的入射模式耦合到 m 为 0、1 阶的散射模式上, 对于 m 为 2、3 阶的散射模式主要为同模式入射波产生。在图 14 中, 1000 Hz 时的 T 矩阵也显示出了相应的特征。这主要是因为当 m 增大后, m 模式周期减小, 猫眼模型的球体部分的作用上升, 造成在小周期上有球体正交特征。

4 结论

文章中提出了一种求解 T 矩阵的方法。这种方法利用 HIEM 求解目标表面声场, 然后对目标表面采用数值积分求得 T 矩阵。通过计算刚性边界的球体、有限长圆柱体和猫眼三种目标模型的散射声指向性, 与解析解或 HIEM 结果对比, 证明新的计算方法可以很准确计算任意形状目标的散射 T 矩阵。该方

法结合了原有 T 矩阵法和 HIEM 法的优点: 计算一次 T 矩阵就可以算出不同入射方向下的散射声场, 可以快速计算目标散射特性; T 矩阵指明了目标对不同模式波的耦合作用, 其行向量指出了不同入射模式产生与该行对应的 nm 阶散射模式的能力; 列向量表明单独模式入射时产生不同模式散射的能力; 可以直接用于求解散射声场的基函数系数; 适用范围广, 能精确求解大纵横比、非轴对称等目标; 避免了模式增加引起的矩阵求解中遇到的病态问题; 简化了基函数系的选取, 对不同目标可以用同一套基函数系就可以求解, 为目标散射性能对比提供方便。对目标摆放方位角和表面阻抗特性在 T 矩阵中的表现还需进一步研究。

参 考 文 献

- 1 Waterman P C. New formulation of acoustic scattering. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1969; **45**(6): 1417—1429
- 2 Waterman P C. Symmetry, unitarity and geometry in electromagnetic scattering. *Phys. Rev.*, 1971; **D3**: 825—839
- 3 Tolocman W. Comparison of the T -matrix and Helmholtz integral equation methods for wave scattering calculations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1985; **77**(2): 369—374
- 4 Hackman R H. The transition matrix for acoustic and elastic wave scattering in prolate spheroidal coordinates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1984; **75**(1): 35—45
- 5 Hackman R H. An application of the spheroidal coordinate based T -matrix. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1985; **78**(3): 1058—1071
- 6 Koopmann G H, Benner H. Method for computing the sound power of machines based on the Helmholtz integral. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1982; **71**(1): 78—89
- 7 Tolocman W. Calculation of Acoustic Wave Scattering by Means of the Helmholtz Integral Equation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1984; **76**(2): 599—607
- 8 Giordano J A, Koopmann G H. State space boundary element-finite element coupling for fluid-structure interaction analysis. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995; **98**(1): 363—372
- 9 徐海亭, 涂哲民. 积分方程法与求解谐振频率的声散射. *声学学报*, 1995; **20**(1): 26—32
- 10 范 军, 卓琳凯. 水下目标回波特性计算的图形声学方法. *声学学报*, 2006; **31**(6): 511—516
- 11 李 微, 赵 耀, 张 涛, 刘敬喜. 水下港硬体声散射场计算及分析. *声学技术*. 2007; **26**(5): 844—849
- 12 Hasheminejad S M, Badsar S A. Acoustic scattering by a pair of poroelastic spheres. *Q. Jl Mech. Appl. Math.*, 2004; **57**(1): 95—113