

无限长粘弹性圆柱管中轴对称波的传播模式和衰减

何世平 汤渭霖 范 军

(上海交通大学振动、冲击、噪声国家重点实验室 上海 200030)

2003 年 7 月 1 日收到

2003 年 11 月 17 日定稿

摘要 在 Kelvin-Voigt 线性粘弹性模型框架内研究了无限长粘弹性圆柱管中轴对称波的传播和衰减。通过一个复根搜索程序对频散方程的求解得到无量纲化相速度频散曲线和衰减曲线。比较了引入损耗因子后粘弹性圆柱管与弹性圆柱管中轴对称波传播的特性。给出了圆柱管的外内径之比、损耗因子和材料参数对相速度和衰减的影响。分析结果表明与弹性圆柱管相比粘弹性圆柱管中轴对称波各阶传播模式均存在衰减, 高阶传播模式并无严格意义的截止频率。损耗因子对第一阶传播模式的相速度影响很小, 而对衰减的影响则比较大, 穿孔率对波传播的相速度和衰减有相当大的影响。

PACS 数: 43.20

Axisymmetric wave propagation and attenuation along an infinite viscoelastic cylindrical tube

HE Shiping TANG Weilin FAN Jun

(State Key Laboratory of Vibration, Shock & Noise of Shanghai Jiaotong University Shanghai 200030)

Received Jul. 1, 2003

Revised Nov. 17, 2003

Abstract Axisymmetric wave propagation and attenuation along viscoelastic cylindrical tube are investigated within the framework of Kelvin-Voigt linear viscoelastic model. Non-dimensional phase velocity and attenuation of axisymmetric viscoelastic wave propagation are obtained by a complex root searching program. The characteristics of axisymmetric waves propagation are compared between viscoelastic cylindrical tube and elastic cylindrical tube. The influences of porosity and loss factor and material parameters on phase velocity and attenuation are given. The results show that there exist attenuation in all propagation modes along viscoelastic cylindrical tube, and higher-order propagation modes haven't cut-off frequency. Loss factor has little influence on phase velocity of first mode and large influence on attenuation. Porosity has large influence on both phase velocity and attenuation.

引言

粘弹性材料广泛地应用在各种吸声、隔振结构中, 其中圆柱管是最常用的形式。例如用于气流或液流管道隔振的橡胶接管, 含有圆柱形空腔的水声吸声覆盖层 (Alberich 型消声瓦) 等。后者的每个单元也可以简化为粘弹性圆柱管。无论是隔振还是吸声, 其基本特性依赖于波在粘弹性圆柱管中的传播特性, 包括传播相速度和衰减。在轴向对称激励的情况下管路中存在一些固有的简正波。这些波沿轴向传播, 在径向形成驻波。当管路有限长时, 依赖于两端边界条

件这些轴向传播的简正波发生共振。因此, 首先弄清楚无限长粘弹性圆柱管中波传播和衰减的特性有基础意义。

关于弹性圆柱管中波的传播已经有大量的研究, 最近的文献主要有文献 1—3。对于粘弹性圆柱管中波的传播和衰减的研究, 文献 4 运用近似薄壳理论分析了粘弹性圆柱壳在轴对称激励下的动态响应, 然而仅仅对材料耗散比较小的情况适用。文献 5 研究了充液粘弹性圆柱管中波的传播, 圆柱管的外边界固定, 针对的是管道吸声问题, 且适用于薄管壁的情况。现有文献中很少讨论十分厚的粘弹性管的

情况。

本文应用 Kelvin-Voigt 线性粘弹性模型建立了具有和弹性波动方程同样形式的粘弹性波动方程。通过求解给定边界条件的频散方程, 得出无限长粘弹性圆柱管的频散曲线和对应的衰减, 衰减由轴向传播波数的虚部来表示。然后比较了由于引入损耗因子后粘弹性和弹性圆柱管相速度频散曲线的差异。分析了穿孔率、损耗因子以及材料参数对轴对称粘弹性波传播和衰减的影响。

$$\left[1 + \frac{\mu_v}{\mu_e} \frac{\partial}{\partial t}\right] \nabla^2 \mathbf{u} + \left(\frac{\lambda_e + \mu_e}{\mu_e}\right) \left[1 + \frac{\lambda_v + \mu_v}{\lambda_e + \mu_e} \frac{\partial}{\partial t}\right] \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

其中, ρ 是密度, λ_e 和 μ_e 是弹性 Lamé 常数, λ_v 和 μ_v 是粘性系数, $c_t^2 = \mu_e/\rho$, \mathbf{u} 是向量位移场。在简谐运动 ($e^{-i\omega t}$) 情况下, 基本方程可以改写为:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (2)$$

其中:

$$\mu = \mu_e - i\omega\mu_v, \quad \lambda = \lambda_e - i\omega\lambda_v \quad (3)$$

是粘弹性的复 Lamé 常数。于是粘弹性方程在形式上与弹性方程相同, 只要将弹性 Lamé 常数代之以粘弹性的复数 Lamé 常数。

在实际问题中, 经常给定的粘弹性材料参数为通过实验确定的复杨氏模量 E 和复泊松比 ν :

$$E = E'(1 - i\eta_E), \quad \nu = \nu'(1 - i\eta_\nu). \quad (4)$$

复的纵波速度和横波速度为:

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (5)$$

其中:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

引入标量势函数 ϕ 和向量势函数 ψ , 令:

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \psi, \quad \nabla \cdot \psi = 0$$

取柱坐标 (r, θ, z) , 类似于弹性问题, 在轴对称 (场量与方位角 θ 无关) 情况下场方程可以用两个标量函数 ϕ 和 ψ 满足 Helmholtz 方程来代替

$$(\nabla^2 + \kappa_l^2)\phi = 0, \quad (\nabla^2 + \kappa_t^2)\psi = 0, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} u_r(r) \\ u_z(r) \\ \sigma_{rr}/2\mu \\ \sigma_{rz}/\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_l J_1(k_l r) & -k_l Y_1(k_l r) & -iK k_t J_1(k_t r) & -iK k_t Y_1(k_t r) \\ iK J_0(k_l r) & iK Y_0(k_l r) & k_t^2 J_0(k_t r) & k_t^2 Y_0(k_t r) \\ P(r) & Q(r) & R(r) & S(r) \\ -M J_1(k_l r) & -M Y_1(k_l r) & -G J_1(k_t r) & -G Y_1(k_t r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}, \quad (12)$$

1 理论描述

假设无限长粘弹性圆柱管的外半径为 a , 内半径为 b , 外半径和内半径之比为 $\alpha = a/b$, 对应的穿孔率定义为 $1/\alpha^2$ 。

对于粘弹性介质, 采用 Kelvin-Voigt 线性粘弹性模型, 得到基本方程^[6]:

其中

$$\kappa_l^2 = \omega^2/c_l^2, \quad \kappa_t^2 = \omega^2/c_t^2. \quad (7)$$

有关的位移和应力是:

$$\begin{cases} u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}, & u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{\partial\psi}{r\partial r}, \\ \tau_{rr} = \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = \\ \quad -\lambda\kappa_l^2\phi + 2\mu \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\partial z} \right), \\ \tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \\ \quad \mu \left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z} + 2\frac{\partial^3\psi}{\partial r\partial z^2} + \kappa_t^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right), \\ \tau_{zz} = \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} = \\ \quad -\lambda\kappa_l^2\phi + 2\mu \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z} \right). \end{cases} \quad (8)$$

取圆柱管中的势函数解为 (省略 $e^{-i\omega t}$):

$$\begin{cases} \phi = [AJ_0(k_l r) + BY_0(k_l r)]e^{iKz}, & \kappa_l^2 + K^2 = \kappa_l^2, \\ \psi = [CJ_0(k_t r) + DY_0(k_t r)]e^{iKz}, & \kappa_t^2 + K^2 = \kappa_t^2, \\ b \leq r \leq a, \end{cases} \quad (9)$$

$$\phi_1 = FJ_0(k_l r)e^{iKz}, \quad \kappa_l^2 + K^2 = \omega^2/c_l^2, \quad b > r \quad (10)$$

其中 ϕ_1 是圆柱管中空气或流体的位移势函数, 相应的位移和声压是

$$u_1 = -\nabla\phi_1, \quad p_1 = -\rho_1\omega^2\phi_1. \quad (11)$$

弹性理论中已导出圆柱管内的位移和应力^[7]:

其中:

$$\begin{cases} P(r) = -TJ_0(k_l r) + \frac{k_l}{r}J_1(k_l r), & Q(r) = -TY_0(k_l r) + \frac{k_l}{r}Y_1(k_l r), \\ R(r) = N \left[J_0(k_t r) - \frac{1}{k_t r}J_1(k_t r) \right], & S(r) = N \left[Y_0(k_t r) - \frac{1}{k_t r}Y_1(k_t r) \right], \\ T = \frac{1}{2}(k_t^2 - K^2), & G = k_t(k_t^2 - K^2), & N = -iKk_t^2, & M = 2iKk_l. \end{cases} \quad (13)$$

由于本文考虑的是内部具有均匀分布的圆柱形空腔的粘弹性体吸声问题, 因此假设边界条件为 (省略 e^{iKz}):

$$\begin{cases} u_r|_a = 0, & \sigma_{rr}|_b = -p_1 = \rho_1 \omega^2 J_0(k_1 b) F, \\ \sigma_{rz}|_a = 0, & \sigma_{rz}|_b = 0, & u_r|_b = k_1 J_1(k_1 b) F. \end{cases} \quad (14)$$

把位移和应力表达式代入边界条件, 导致方程组:

$$\begin{bmatrix} k_l J_1(k_l a) & k_l Y_1(k_l a) & iKk_t J_1(k_t a) & iKk_t Y_1(k_t a) & 0 \\ P(b) & Q(b) & R(b) & S(b) & -\frac{\rho_1 \omega^2}{2\mu} J_0(k_1 b) \\ MJ_1(k_l a) & MY_1(k_l a) & GJ_1(k_t a) & GY_1(k_t a) & 0 \\ MJ_1(k_l b) & MY_1(k_l b) & GJ_1(k_t b) & GY_1(k_t b) & 0 \\ k_l J_1(k_l b) & k_l Y_1(k_l b) & iKk_t J_1(k_t b) & iKk_t Y_1(k_t b) & k_1 J_1(k_1 b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{bmatrix} = 0. \quad (15)$$

从严格意义上讲, 复杨氏模量 E 和复泊松比 ν 这两个材料参数均与频率有关。然而在实际中, 根据文献 8, 在一定频率范围内, 复泊松比的虚部非常小, 可以忽略, 复弹性模量中的损耗因子 η 在相当大的频率范围内与频率无关。这里我们就假定复泊松比的虚部为零, 复弹性模量不随频率而变化。因此, 纵波速度和横波速度 c_l, c_t 也是与频率无关的复常数。

在此基础上, 我们对 (15) 式内的参量作无量纲化处理, 令:

$$Z_l = k_l b, \quad Z_t = k_t b, \quad Z_1 = k_1 b, \quad x = kb$$

有:

$$\begin{cases} Z_l^2 = \left(\frac{\omega b}{c_l}\right)^2 - x^2, \\ Z_t^2 = \left(\frac{\omega b}{c_t}\right)^2 - x^2, \\ Z_1^2 = \left(\frac{\omega b}{c_1}\right)^2 - x^2 \end{cases}$$

方程 (15) 可以重新写为:

$$\begin{bmatrix} Z_l J_1(\alpha Z_l) & Z_l Y_1(\alpha Z_l) & ix Z_t J_1(\alpha Z_t) & ix Z_t Y_1(\alpha Z_t) & 0 \\ P'(Z_l) & Q'(Z_l) & R'(Z_t) & S'(Z_t) & -\frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho} \left(\frac{\omega b}{c_t}\right)^2 J_0(Z_1) \\ M' J_1(\alpha Z_l) & M' Y_1(\alpha Z_l) & G' J_1(\alpha k_t b) & G' Y_1(\alpha k_t b) & 0 \\ M' J_1(Z_l) & M' Y_1(Z_l) & G' J_1(k_t b) & G' Y_1(k_t b) & 0 \\ Z_l J_1(Z_l) & Z_l Y_1(Z_l) & ix Z_t J_1(k_t b) & ix Z_t Y_1(k_t b) & Z_1 J_1(Z_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A/b^2 \\ B/b^2 \\ C/b^3 \\ D/b^3 \\ F/b^2 \end{bmatrix} = 0, \quad (16)$$

其中:

$$\begin{cases} P'(x) = -\frac{1}{2}(Z_t^2 - x^2)J_0(Z_l) + Z_l J_1(Z_l), \\ Q'(x) = -\frac{1}{2}(Z_t^2 - x^2)Y_0(Z_l) + Z_l Y_1(Z_l), \\ R'(x) = -ix Z_t^2 J_0(Z_t) + ix Z_t J_1(Z_t), \\ S'(x) = -ix Z_t^2 Y_0(Z_t) + ix Z_t Y_1(Z_t), \\ M' = i2x Z_l, & G' = Z_t(Z_t^2 - x^2) \end{cases} \quad (17)$$

要使该方程有解, 则系数行列式必须为零。用 Δ 表示该方程的特征行列式, 则方程:

$$\Delta = 0 \quad (18)$$

给出一系列固有轴向波模式。行列式的每个元素都是

复宗量的 Bessel 函数。因此, 对确定的材料和 α , 给定一个 ωb 可以解出一组复根 $x_m = K_m b, m = 1, 2, \dots$, 并由此决定 $k_{l,m}$ 和 $k_{t,m}$ 。它们代表各阶轴向波模式, K 的实部是波的传播常数, 虚部反映传播衰减。这里令 $c_p = \omega b / \text{Re}(x)$, 其中 c_p 是相速度。将结果表示成 $\text{Im}(Kb) \sim \omega b / \text{Re}(c_t), c_p \sim \omega b / \text{Re}(c_t)$, 其中 α 作为参变量。

由于圆柱管内空气的阻抗相对于管壁的阻抗很小, 对管壁的波的传播模式影响很小, 而且能量的损耗主要存在于粘弹性管壁中而不是空气中, 因而可以忽略空气的影响, 将管内看作真空。在 Δ 中去掉第 5 行第 5 列即得:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_l J_1(\alpha Z_l) & Z_l Y_1(\alpha Z_l) & ix Z_t J_1(\alpha Z_t) & ix Z_t Y_1(\alpha Z_t) \\ P'(x) & Q'(x) & R'(x) & S'(x) \\ M' J_1(\alpha Z_l) & M' Y_1(\alpha Z_l) & G' J_1(\alpha Z_t) & G' Y_1(\alpha Z_t) \\ M' J_1(Z_l) & M' Y_1(Z_l) & G' J_1(Z_t) & G' Y_1(Z_t) \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

由此可以看出， Δ 中各元素只与 $\omega b, x, \alpha, \rho_1, c, c_t, c_l$ 有关。 ρ_1, c, c_l, c_t 为与频率无关的材料参数，因此，当材料和 α 一定时，根据方程 (16)，相速度 $c_p = \omega b / \text{Re}(Kb)$ 仅与 ωb 有关。

2 计算结果和分析

本文通过一个复根搜索程序得到粘弹性圆柱管轴对称波传播的无量纲化相速度频散曲线和对应的衰减。材料参数取性能差异比较大的氯丁橡胶和硅橡胶。氯丁橡胶的材料参数为：密度 1300 kg/m^3 ，杨氏模量的实部为 $4 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ ，泊松比为 0.49，硅橡胶的材料参数为：密度 1000 kg/m^3 ，杨氏模量为 $1.8 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ，泊松比为 0.49976。圆柱管的外半径和内半径之比分别取 $\alpha = 1.4, 2.0, 4.0$ (对应的穿孔率分别为 $\varepsilon = 51\%, 25\%, 6.25\%$)，复杨氏模量的损耗因子分别取 $\eta = 0.1, 0.2, 0.3$ 。这里我们假设圆柱管的外半径 α 不变，为了方便比较，我们取横坐标为 $\omega a / \text{Re}(c_t)$ ，相速度频散曲线的纵坐标取 $c_p / \text{Re}(c_t)$ ，衰减曲线的纵坐标取 $\text{Im}(Ka)$ ，其中， $\text{Re}(c_t)$ 表示复横波速度的实部， $\text{Im}(Ka)$ 表示轴向传播波数的实部乘上圆柱管的外半径。

图 1 为 $\alpha = 2$ 时氯丁橡胶在损耗因子 $\eta = 0$ 和 $\eta = 0.2$ 的频散曲线的比较图，图 2 为 $\eta = 0.2$ 时的衰减曲线。在图 1 中，虚线表示弹性圆柱管各阶传播模式相速度频散曲线，实线表示的是引入损耗因子后粘弹性圆柱管各阶传播模式的相速度频散曲线。从图 1、图 2 中可以看出，由于材料损耗因子的引入，圆柱管中的波传播特性发生如下变化：(1) 所有传播模式均存在衰减，而理想的弹性情况下，除了在一定截止频率之内存在高阶非传播波之外，各阶传播模式不存在衰减现象。(2) 高阶传播模式 VT_1, VT_2, VT_3, \dots 等不存在严格意义上的截止频率，但是在损耗因子不十分大的情况下，仍然存在近似截止的情况，即在某个频率以下衰减非常大，而在该频率以上衰减急剧减小。(3) 最低阶模式 VT_0 不存在截止，它的相速度与材料无损耗的情况非常接近，在低频处，它的衰减随着频率的增加变化非常缓慢，在一定的频率之后，随着频率的增加单调增加。

2.1 不同穿孔率对相速度和传播衰减的影响

图 3 到图 6 并结合图 1、图 2 给出了在损耗因子

$\eta = 0.2$ 时圆柱管的外内半径之比分别为 $\alpha = 1.4, 2.0, 4.0$ 情况下的相速度频散曲线及衰减。在圆柱管外径固定的情况下，在一定频率范围之内，随着圆柱管外半径与内半径之比的增加，存在传播模式的阶数越来越多，高阶传播模式向低频移动。

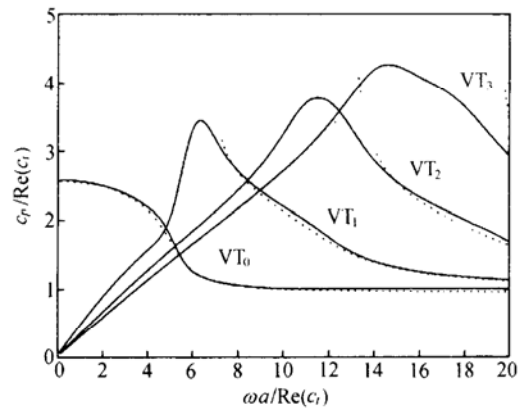


图 1 $\eta = 0$ 和 $\eta = 0.2$ 相速度频散曲线

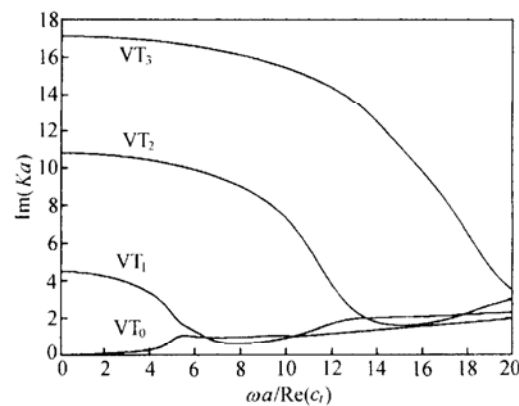


图 2 $\eta = 0.2$ 衰减曲线

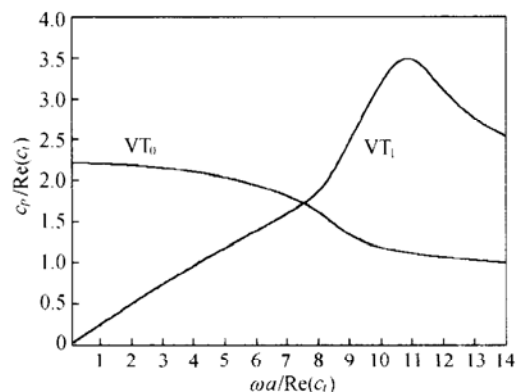


图 3 $\alpha = 1.4$ 相速度频散曲线

由于 VT_0 模式决定低频传播特性，我们给出了在不同穿孔率下相速度和衰减曲线比较图，见图 7 和

图 8。从图 7 中可以看出，在一定的频率范围内，相速度随着 α 的增大而增大，且 α 越大，相速度随频率的变化越快。衰减曲线随着 α 的增大峰值点向低频偏移。

2.2 不同损耗因子对相速度和传播衰减的影响

图 9 和图 10 给出了在圆柱管的外内半径之比 $\alpha = 2$ 时不同损耗因子 $\eta = 0.1, 0.2, 0.3$ 情况下 VT_0 传播模式的相速度及其对应的衰减变化情况。从图中可以看出损耗因子对相速度的影响很小，而对衰减影响很大。

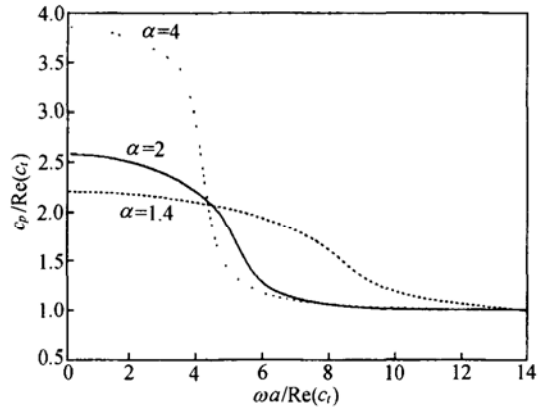


图 7 不同穿孔率下 VT_0 相速度曲线的比较

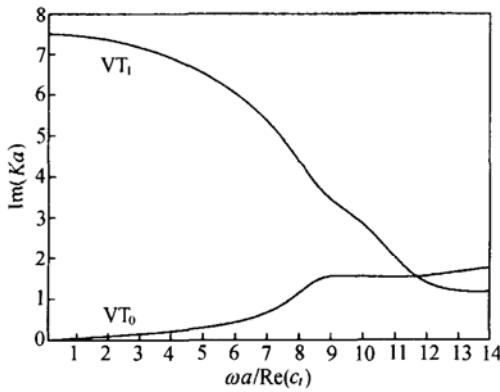


图 4 $\alpha = 1.4$ 衰减曲线

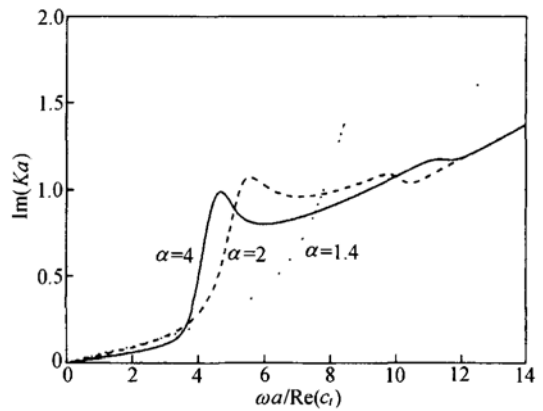


图 8 不同穿孔率下 VT_0 衰减曲线的比较

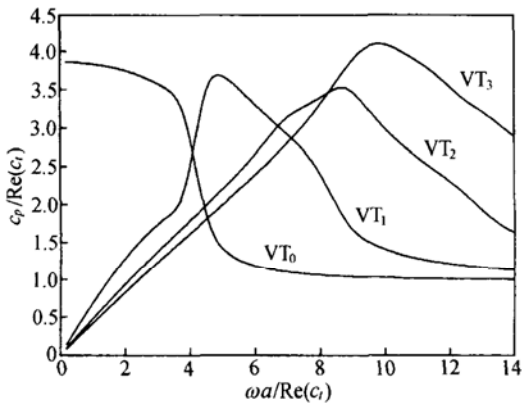


图 5 $\alpha = 4$ 相速度频散曲线

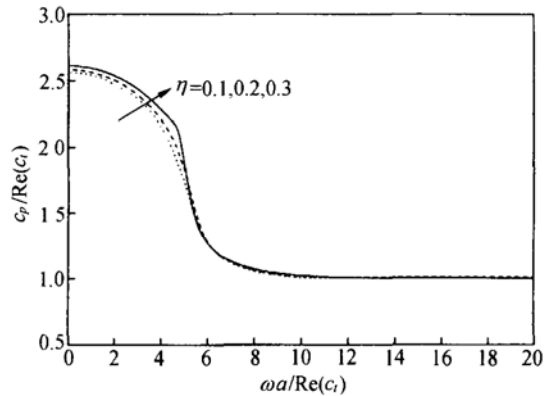


图 9 不同损耗因子下 VT_0 相速度曲线的比较

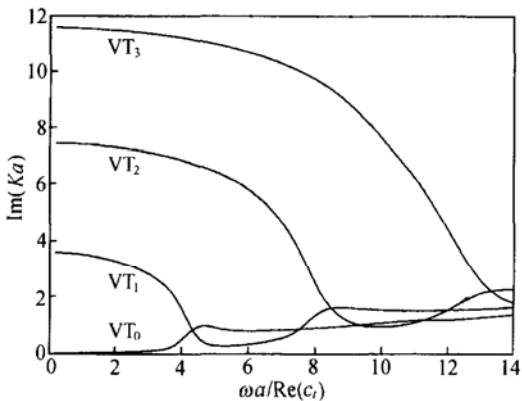


图 6 $\alpha = 4$ 衰减曲线

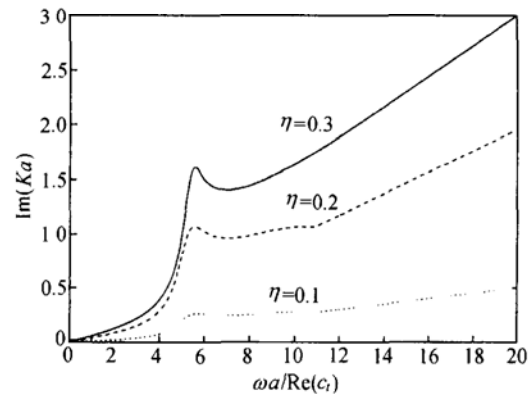


图 10 不同损耗因子下 VT_0 衰减曲线的比较

2.3 硅橡胶的相速度频散曲线和传播模式的衰减

硅橡胶具有很小的剪切模量和横波速度，在研究中引起了人们很大的关注。本文计算了圆柱管外内半径之比 $\alpha = 1.4$ ，损耗因子 $\eta = 0.1$ 的一组相速度频散曲线及其对应的衰减，见图 11 和图 12。从图中可以看出，它与氯丁橡胶的频散曲线和衰减类似，但是由于硅橡胶具有很小的横波速度，图中对应的实际的相速度要比氯丁橡胶的小很多。横坐标对应的实际频率的作用范围也小很多。

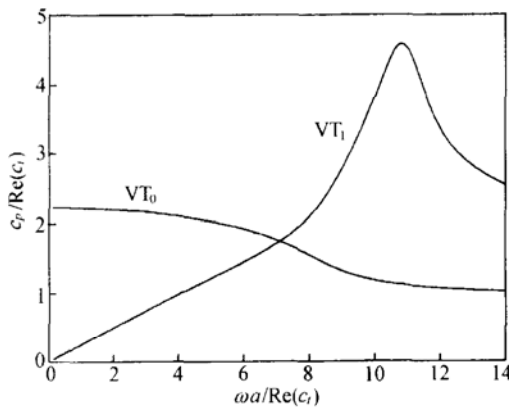


图 11 硅橡胶的相速度频散曲线

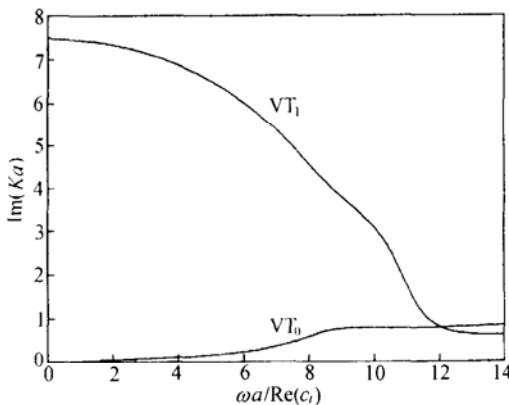


图 12 硅橡胶的衰减曲线

3 结论

本文在 Kelvin-Voigt 线性粘弹性模型的框架内，

研究了无限长粘弹性圆柱管轴对称传播模式及其衰减。和弹性圆柱管的情形相比，它们都具有类似的传播模式，所不同的是粘弹性圆柱管所对应的每一阶传播模式都存在衰减现象，高阶传播模式并无严格的截止频率。本文的分析和计算结果表明，不同的损耗因子对 VT_0 传播模式的相速度影响很小，而对衰减的影响则比较大；不同的穿孔率对波传播的相速度和衰减有相当大的影响。对于一般的低频吸声问题，如果我们关注的频率在一定的范围之内，由于高阶传播模式的衰减很大，所起的作用非常有限，主要是 VT_0 传播模式起作用。

参 考 文 献

- 1 Sinha B K, Plona T J. Axisymmetric wave propagation in fluid-loaded cylindrical shells. I: Theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1992; **92**(2): 1132—1143
- 2 Plona T J, Sinha B K. Axisymmetric wave propagation in fluid-loaded cylindrical shells.II:Theory versus experiment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1992; **92**(2): 1144—1156
- 3 Dwyann Lafleur L, Douglas Shields F. Low-frequency propagation modes in a liquid-filled elastic tube waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1994; **97**(3): 1435—1445
- 4 Moodie T B, Tait R J, Haddow J B. Waves in compliant tube, wave propagation in viscoelastic media. Pitman publishing Inc., 1982
- 5 Rubinow S I, Keller J B, Wave propagation in a fluid-filled tube. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1971; **50**(1): 198—223
- 6 Gaunard G. Methods for solving the viscoelasticity equations for cylinder and sphere problems, NSWC/WOL Tech.Rep., 1976, # AD-A025, 302
- 7 汤渭霖. TBL 压力起伏激励下粘弹性圆柱壳内的噪声场: I. 噪声产生机理. *声学学报*, 1997; **22**(1): 60—69
- 8 WU Lei. The dynamic properties of voided polymers, PHD Thesis, George W.Woodruff School of Mechanical Engineering George Institute of Technology, November, 2001
- 9 Armenakas A E, Gazis D C, Herrmann G. Free Vibrations of Circular Cylindrical Shells, Pergamon, New York, 1969