

# 基于线调频频散变换的多模式 超声兰姆波时延估计\*

行鸿彦 刘照泉 万明习

(西安交通大学电子与信息工程学院生物医学工程系 西安 710049)

2001 年 1 月 15 日收到

2001 年 5 月 17 日定稿

**摘要** 适合薄板检测的超声兰姆波多模式具有频散特性，它携带着有用的时延信息，但估计其中的时延参数有一定的困难。本文提出的基于自适应线调频频散变换的超声兰姆波多模式时延估计方法使提取其时延参数成为可能。仿真和实验结果说明了这种方法的有效性。

PACS 数： 43.60, 43.35, 43.25

## The time-delay estimation for the multi-mode ultrasonic Lamb waves based on the chirplet dispersion transform

XING Hongyan LIU Zhaoquan WAN Mingxi

(Department of Biomedical Engineering, School of Electronics and Information Engineering,  
Xi'an Jiaotong University Xi'an 710049)

Received Jan. 15, 2001

Revised May 17, 2001

**Abstract** Multi-mode ultrasonic Lamb waves, which are suitable for non-destructive testing of the thin plates, have dispersion characters and accompany with a lot of useful information of the time delay. But there are many difficulties to estimate the time delay parameter. Based on the adaptive chirplet dispersion transform, we put forward a new method of the time delay estimation to make the parameter estimation possible. The results of the simulations and experiments show its effectiveness.

## 引言

在一定的条件下，通过薄板的超声波能产生多模式兰姆波，它主要由 A 型和 S 型<sup>[1]</sup> 模式组成，同时 A 和 S 型每种模式又有具有不同相速度的若干模式，由于它具有频散特性，所以通过薄板产生的多模式超声兰姆波带有丰富的时延信息，使其更适合于薄板缺陷的检测。当传播距离较长时，从时域看，各模式波是分开的，估计其参数相对容易些；当传播距离较短时，各模式波叠加在一起，使其波形变得很复杂，从而估计其时延参数很困难。

时间延迟估计方法主要是广义相关算法<sup>[2]</sup> 及其各种扩展<sup>[3-5]</sup>，它们一般假设信号是平稳的，从而一

般时延估计方法是不适合估计多模式超声兰姆波时延的。Y.T.Chan<sup>[6]</sup> 虽然把现代信号处理方法小波变换引入到了时延估计中，但他只证明了正交小波变换可近似为最大似然时延估计，这仍是广义相关算法的一种形式，它不太适合估计超声兰姆波多模式的时延。

短距多模式超声兰姆波与测井中短源距全波列声波有相似性，它们都是叠加在一起的。文献 7 采用了希尔伯特瞬时参数法在波形重叠处的跳变估计其时延，我们<sup>[8]</sup> 曾把此法引入短距多模式超声兰姆波的时延估计中，证明了它不能有效地估计短距多模式超声兰姆波时延。同时，我们也提出了基于小波变换模极大值的多模式超声兰姆波时延估计法和基于

\* 国家自然科学基金资助项目 (69925101)

解析小波瞬时参数的多模式超声兰姆波的时延估计法, 它们均能估计多模式超声兰姆波的时延, 但其精度不是太高。

线调频小波变换首先由 S.Mann 和 S.Haykin<sup>[9]</sup> 提出来, 随后 D.Mihovilovic 和 R.N Bracewell<sup>[10]</sup> 也提出了物理意义略有区别的线调频小波变换, 它有时频表示<sup>[11]</sup> 和时频分布<sup>[12]</sup> 两种形式, 据其时频分布形式可扩展产生频散变换、等距二维信号变换和非均匀滤波器组等。线调频小波变换已广泛应用于语音信号分离<sup>[10]</sup>、高速运动源位置确定<sup>[13]</sup>、雷达图像处理<sup>[14]</sup>、模式识别和地震波仿真<sup>[15]</sup> 等。

Richard G Baraniuk 和 Douglas L Jones<sup>[12]</sup> 给出了理想情况下频散信号的几种时频变换, 短时傅里叶变换反映了频散信号时频表示的倾斜, 其聚集性不理想; 而小波变换未能反映频散信号的时频表示; 频散变换不仅反映了频散信号时频表示的倾斜特性, 而且在倾斜方向上具有较好的聚集性。根据频散变换的特点和多模式超声兰姆波的时延特性, 我们在文献 12 基础上提出了一种基于自适应线调频频散变换的多模式超声兰姆波时延估计法。从而使传播不同距离的多模式超声兰姆波的时延估计成为可能, 特别是短距时的时延得以估计。

本文把线调频小波变换和频散小波变换引入多模式超声兰姆波的时延估计中, 提出了基于自适应线调频频散变换的多模式超声兰姆波时延估计法, 估计了短距多模式超声兰姆波的时延。给出了估计的多模式超声兰姆波的时延仿真结果和实验结果, 并进行了讨论。

## 1 基于自适应线调频频散变换的超声兰姆波多模式时延估计法

### 1.1 兰姆波和漏兰姆波的关系

兰姆波是板内波, 其振幅代表着波在其传播路径上与材料及其结构相互作用的结果。合理的选择发射频率和入射角度(由板中的兰姆波色散特性决定), 使倾斜入射声束在置于空气或真空中的板内激发板波, 从而在应力自由边界(空气负载)条件下所激励的板波称为兰姆波, 在理论上它的能量是不会向板外扩散和泄漏的。

在有液体负载的条件下(即板置于液体中), 有板波“泄漏”到液体中, 而把置于液体中板内的兰姆波称为漏兰姆波, 漏兰姆波则因板周围是液体, 其能量会不断向板外泄漏, 从而在液体中也有漏兰姆波(Leaky Lamb Waves)存在。

由于漏兰姆波在液体中有能量泄漏, 它不仅经过板有衰减, 而且经过液体也有衰减, 所以漏兰姆波比兰姆波衰减大, 且随传播距离增大而显著衰减。但在液体密度小于板材密度的 1/3 以下时, 漏兰姆波与兰姆波时延及频散特性基本相同, 二者之间的误差可忽略不计。那么一般检测的漏兰姆波可近似说成是兰姆波。

兰姆波和漏兰姆波法均是板状复合材料检测的有效手段之一, 兰姆波的测量装置与漏兰姆波的基本相同, 而二者的区别是前者在探头上涂少许液体将激励纵波耦合到置于空气中的被测试件, 后者是将被测件整体置于液体中进行激励耦合。本论文的实验采用了后者, 则实验所测信号应为漏兰姆波, 为方便, 本文均以兰姆波来叙述, 特给予说明。

### 1.2 基于线调频小波变换的多模式超声兰姆波时延估计

设通过薄板产生多模式超声兰姆波信号的纵波激励信号为:

$$x(t) = B(t) \sin(\omega_c t + \varphi), \quad (1)$$

$B(t)$ ,  $\omega_c$ ,  $\varphi$  分别是激励信号的幅度、载频和初相位。 $B(t)$  决定着信号的频宽,  $\omega_c$  决定着信号的高低频。

设接收到的多模式超声兰姆波信号为  $u_L(t)$ , 那么, 根据多模式超声兰姆波的特性,  $u_L(t)$  的数学模型可近似写为:

$$\begin{aligned} u_L(t) = & \sum_i u_{L_{ai}} + \sum_j u_{L_{sj}} = \\ & \sum_i A_i(t) \sin(\omega_c(t - \tau_i) + \varphi_i) + \\ & \sum_j S_j(t) \sin(\omega_c(t - \tau_j) + \varphi_j), \end{aligned} \quad (2)$$

$i, j$  分别表示第  $i$  阶的 A 模式和第  $j$  阶 S 模式,  $A_i(t), \tau_i, \varphi_i$  分别表示第  $i$  阶 A 模式的幅度、延时和相位;  $S_j(t), \tau_j, \varphi_j$  分别表示第  $j$  阶 S 模式的幅度、延时和相位。 $i, j$  阶的范围确定是根据激励信号的输入角度范围和载频乘板厚的积来确定, 当低频宽带激励且载频板厚积较小时,  $i, j$  主要含有低阶模式, 反之将还含有高阶模式。

线调频小波变换是小波变换的扩展<sup>[16]</sup>, 形式上, 线调频小波像小波近似认为是“一段波”(音调加窗)一样, 它可认为是“一段线调频”(扫频波加窗)。线调频小波变换统一了许多完全不同的信号表示法, 特别是时频方法, 像傅里叶变换(包括短时傅里叶变换)、频谱图、Wigner 分布、随机函数、宽带随机函数和小波变换, 每一个都可认为是线调频小波变换的一种特殊情况。以上所述时频方法和许多新的方法均可从 8-D 的线调频小波空间(具有合适的平滑核)

通过选择合适的 2-D 族得到。更进一步说, 线调频小波变换是一个得到新的信号表示的一个框架, 它也可说成是从 1-D 域到 8-D 域的一个变换(映射)。线调频小波变换主要用于处理非平稳随机信号。

设多模式超声兰姆波信号的线调频小波变换<sup>[11]</sup>为:

$$LCT(t, f) = \langle u_L(\tau), g_{t, f, \alpha, p, q}(\tau) \rangle, \quad (3)$$

其中:  $u_L(\tau)$  是多模式超声兰姆波信号,  $g_{t, f, \alpha, p, q}(\tau)$  是基线调频小波。为描述各种时频变换方便, 也可引入合成算子  $M_{t, f, \alpha, p, q}$ , 从而式(3) 可变为:

$$LCT(t, f) = \langle u_L(\tau), M_{t, f, \alpha, p, q}(\tau) \rangle. \quad (4)$$

在此变换中, 使用了时间平移、频率平移、时频拉伸、时间倾斜和频率倾斜算子, 从而可知, 多模式超声兰姆波信号  $u_L(t)$  的线调频小波变换为五维连续线调频小波变换。那么用此法估计多模式超声兰姆波信号的时延, 计算就变得很复杂。为此有必要在线调频小波变换的框架下, 根据多模式超声兰姆波信号的频散特点设计新的变换。

### 1.3 基于自适应频散变换的多模式超声兰姆波时延估计法

频散信号反映在时频变换上, 它的各个分量是倾斜的。而多模式超声兰姆波是典型的频散信号, 因此, 在估计其时延时, 主要考虑其时间倾斜作用, 为此分析函数  $M_{uL}^{CT} g(\tau)$  时频表示的分析参数子集<sup>[12]</sup> 取  $\gamma = [t, f, 0, p(t, f), 0]$ , 则多模式超声兰姆波信号  $u_L(t)$  的频散变换定义为三维分析表面  $\gamma = [t, f, 0, p(t, f), 0]$  上各点取值的线调频小波变换<sup>[17]</sup>:

$$(LDu_L)(t, f) = (LC^{CT} u_L)[t, f, 0, p(t, f), 0] = \\ \langle u_L, M_{t, f, 0, p(t, f), 0} g \rangle = \langle u_L, F_f T_t P_{p(t, f)} g \rangle = \\ \frac{1}{\sqrt{jp(t, f)}} \int_{-\infty}^{\infty} u_L(\tau) \overline{e^{j\pi\tau^2/p(t, f)} * g(\tau-t)} e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (5)$$

其中:  $\bar{x} * \bar{y}$  表示卷积  $x * y$  的复数共轭,  $p(t, f)$  表示时间倾斜算子, 由于  $p(t, f)$  控制着时频平面上  $(t, f)$  点处的倾斜度, 则它也称为倾斜函数。所以, 这种频散变换是一种时间 - 频率 - 倾斜变换。

若已知被测薄板的频散特性, 而要估计多模式超声兰姆波时延时, 倾斜函数可适当的确定, 为信号的处理结果提供聚集性好的时频表示。当被测薄板的频散特性不能事先已知时, 需不断调整倾斜函数  $p(t, f)$  使多模式超声兰姆波信号  $u_L(t)$  的频散变换具有最好的时频聚集性, 这样, 不仅能够确定最优的频散变换, 而且也能得到薄板频散特性的信息。

在实际中, 一般被测薄板的频散特性均是未知的, 那么, 基于自适应频散变换的多模式超声兰姆波

时延估计中的倾斜函数  $p(t, f)$  如何调整以实现时延的准确估计呢? 由多模式超声兰姆波的特性方程可知<sup>[1]</sup>, 一般薄板的频散曲线是由指数曲线分段近似拟合而成, 所以此在使倾斜函数  $p(t, f)$  按特定的指数曲线进行自适应调整。为计算方便, 把倾斜函数  $p(t, f)$  设置成仅是时间的函数, 即倾斜函数取为  $p(t)$ 。从而形成了基于自适应频散变换的多模式超声兰姆波时延估计的一般形式。那么, 式(5) 变为:

$$(ALDu_L)(t, f) = (ALC^{CT} u_L)[t, f, 0, p(t, f), 0] = \\ \frac{1}{\sqrt{jp(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} u_L(\tau) \overline{e^{j\pi\tau^2/p(t)} * g(\tau-t)} e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (6)$$

据文献 10, 倾斜函数的瞬时值可以直接从输入信号获得。首先计算一个标准的 Gabor 曲线图(相当于一个倾斜函数为零的 Chirplet 曲线图), 然后提取倾斜函数的瞬时信息, 最后用这个信息来计算频散变换曲线图。此过程是一个不断迭代更新的过程, 直至使得频散变换曲线图的聚集性最佳为止。

基线调频小波的构造和选取也是基于自适应频散变换的多模式超声兰姆波时延估计方法中必须考虑的, 基线调频小波选取是否合理, 直接关系着能否进行有效的时延估计和计算量的大小。在小波变换中, 最优基小波选择一般要满足 3 个条件: 满足允许条件; 小波基函数具有高的时频局部化能力; 小波基函数的功率谱能最佳地与被分析信号的功率谱相匹配<sup>[18]</sup>。而由于小波变换是线调频小波变换的特例<sup>[10]</sup>, 则基线调频小波的选取与其基本相似, 所以, 自适应频散变换的多模式超声兰姆波时延估计方法中的最优基线调频小波为高斯线调频小波包(见 7 式), 即具有高斯复包络的线调频函数族。基线调频小波的中心频率  $f_c$  选为超声激励信号的中心频率。

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\Delta t}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t-t_c}{\Delta t} \right)^2 + j\phi \right] \cdot \\ \exp[j2\pi(f_c t + qt^2)], \quad (7)$$

其中:  $\Delta t = \sqrt{2\sigma}$ ,  $q$  代表线性调频斜率且可正可负。

### 1.4 基于自适应频散变换的多模式超声兰姆波时延估计与表示

多模式超声兰姆波经过自适应频散变换之后, 可以获得它的时频图。从时频图得到各模式波的时间延迟估计, 可以分为以下几个步骤:

- (1) 从时频图上找出所需的各模式波, 设置感兴趣的窗口,
- (2) 在各窗口区域内, 进行图像边缘增强处理,

(3) 在区域内沿时间轴进行搜索, 找出第一个跳变点  $(x, y)$ ,

(4) 根据跳变点的坐标计算出其对应的时间  $t$ , 即为相应模式波的到达时间。

## 2 仿真结果

在仿真过程中, 主要采用两个预定时延的指数调频信号的叠加来模拟超声多模式兰姆波。在对仿真条件如表 1 的模拟多模式兰姆波进行自适应频散变换后, 得到如图 1 所示的时频图。图 1 说明了利用这种方法可以对具有重叠的多模式兰姆波进行有效的时延估计。根据兰姆波的传播特性, 当传播距离不同时, 各模式波间的重叠程度不一, 利用自适应频散变换方法来估计各模式波的时延误差与传播距离之间的关系, 以及它与一般方法、倾斜函数固定时的误差比较, 如图 2 所示。

表 1 仿真条件

频率	铝板厚	模式时延
1 MHz	1 mm	$\tau_{A_0} = 6 \mu\text{s}, \tau_{S_0} = 12 \mu\text{s}$

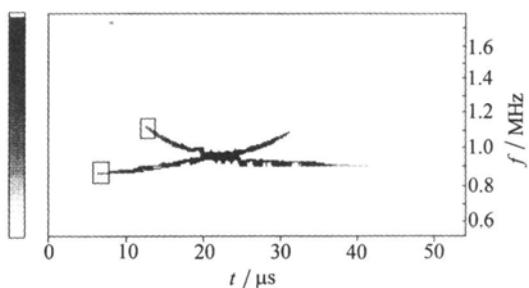


图 1 按表 1 仿真条件所仿真的低频宽带  $A_0$  和  $S_0$  模式的自适应频散变换时频图

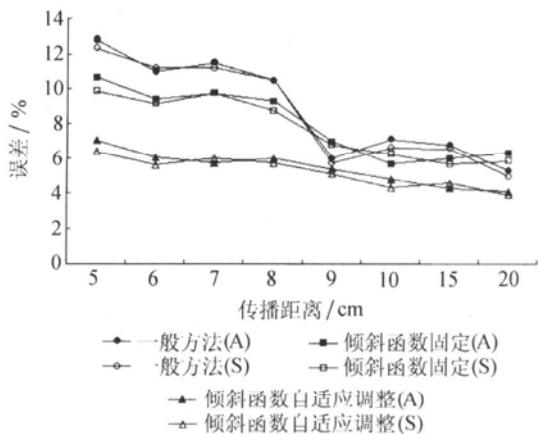


图 2 低频宽带时多模式随距离变化的时延估计误差图  
(A: 反对称, S: 对称)

## 3 实验结果

### 3.1 实验系统

图 3 是本文所用超声多模式兰姆波实验系统, 它采用 Panametrics 公司的多扫描超声自动检测系统 (Multiscan Ultrasonic Automated Inspection Systems 简称 MUAIS), 进行多模式超声兰姆波激励、接收与测量。MUAIS 主要由机械装置 MME-1510-01(换能器夹具、手动万向调节器和浸入式吸声水槽等)、运动控制装置 MMC-2(微步进马达驱动器、位置匹配发生器和 Z80 运动控制器等)、高频数据采样卡(采样频率 100 MHZ、分辨率 8 bit)、超声装置 5800P/R(带宽 35 MHZ)、计算机和随机软件组成。

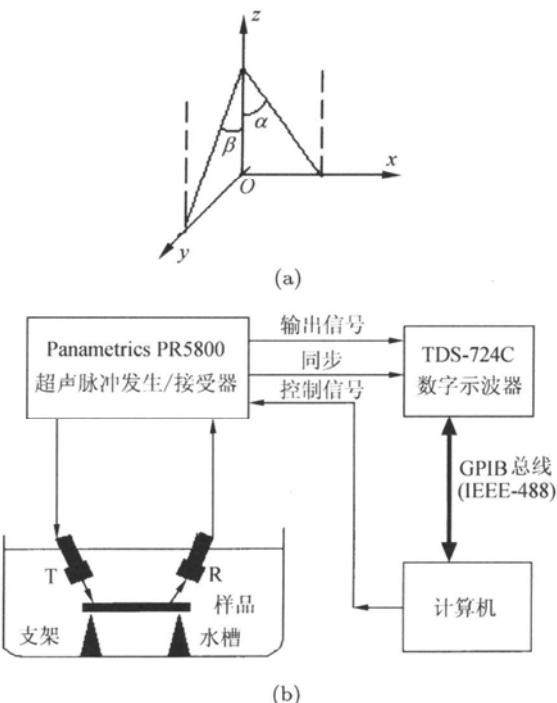


图 3 超声多模式兰姆波实验系统

发射探头 T, 接收探头 R, 发射换能器 T 的入射角度、接收换能器 R 的接收角度、换能器之间及它们与被测材料之间的距离由我们根据理论计算和实验来控制, 入射角与接收角通过手动万向调节器 (Manual Daul Gimbal Manipulator 简称 MDGM) 来调节, 如图 3(a) 所示, 它在被测件表面的 x 和 y 方向上角度能在  $0 \sim 60^\circ$  范围调整, 其角度误差为  $0.1^\circ$ , 换能器与待测样品之间通过水耦合。接收探头 R 的接收角一般应与 T 的入射角一致, 否则不能产生和接收多模式兰姆波。

采用频率为 2.25 MHZ 的低频宽带纵波压电换能器 (V306-SU) 进行发射和接收。

### 3.2 实验过程与结果

实验材料(薄板)放在水槽中支架上, T 和 R 相对倾斜地固定在待测材料的同侧, 为了产生多模式兰姆波, 入射角应随所测材料不同而控制在不同范围内。输入探头通过水耦合给实验材料输入超声激励信号。整个测量系统在计算机的控制下进行。首先在计算机操作界面上设置初始值, 其中采样频率设置为 100 MHz, 然后控制系统调整探头 T(入射) 和 R(接收) 角度、探头与被测样品的距离以及 T 和 R 之间的距离。随后操作计算机向整个系统发出开始工作指令, 超声脉冲发射 / 接收器 5800P/R 的 A 通道输出信号, 激励发射换能器 T, 从而向实验样品发射纵波超声波, 同时从 5800P/R 的 B 通道输入接收换能器 R 接收的经传播后产生的超声多模式兰姆波, 最后送到计算机进行处理和存贮。

在试验中采用的薄板试样为 1 mm 厚的铝板, 两换能器的内侧间距设置在 50 mm, 超声发射换能器 T 的入射角度在  $29^{\circ}31' \sim 36^{\circ}$  范围内。实验所采集的信号经幅度归一化, 如图 4 所示。利用上述的自适应频散变换对 25~45  $\mu$ s 段的信号进行处理, 其时频分布图见图 5。再根据时频图, 可以估计出超声多模式兰姆波  $A_0, S_0, A_1$  各自的延迟时间, 如表 2 所示。

传播距离对多模式超声兰姆波估计有一定的影响, 实验时又采集到不同传播距离的一组多模式超声兰姆波, 两换能器的内侧间距分别设置在 70 mm 和 100 mm, 其时域波形见图 6 和图 8。同样, 采用这种新的时延估计方法可以得到各模式波的时延估计值, 见表 2。

表 2 1 mm 厚的铝板低频宽带下的时延估计值

传播距离	估计值 / $\mu$ s		
	$A_0$ 模式	$S_0$ 模式	$A_1$ 模式
50	29.78	26.54	31.20
70	38.94	33.19	41.63
100	—	41.58	48.93

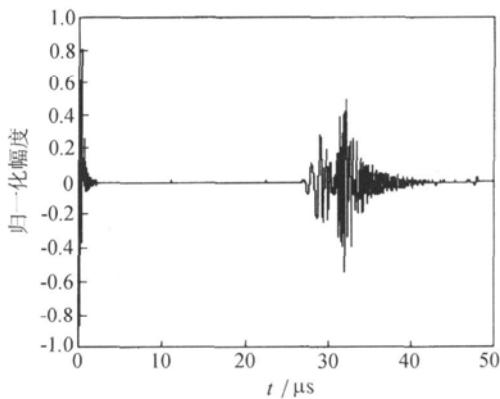


图 4 1 mm 厚铝板中传播 50 mm 采集的时域信号

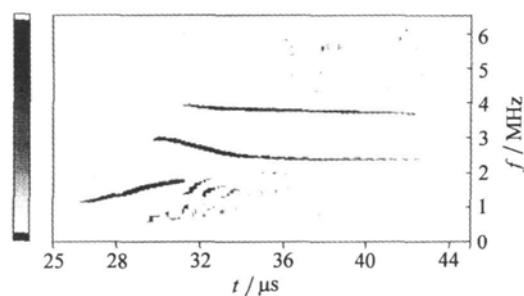


图 5 自适应频散变换处理图 4 中多模式超声兰姆波信号的时频图

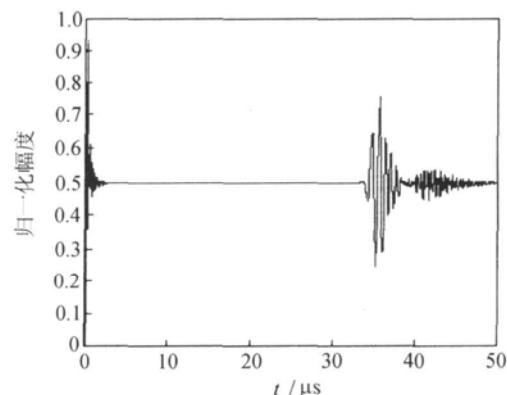


图 6 1 mm 厚铝板中传播 70 mm 采集的时域信号

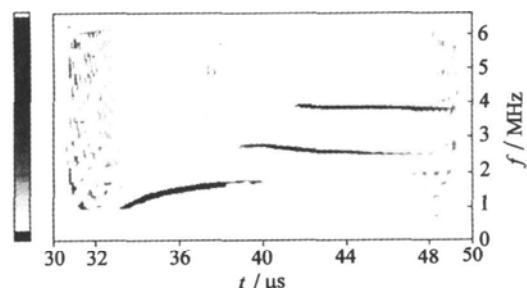


图 7 自适应频散变换处理图 6 中多模式超声兰姆波信号的时频图

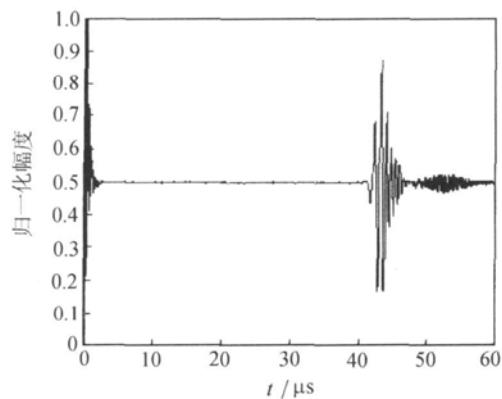


图 8 1 mm 厚铝板中传播 100 mm 采集的时域信号

## 4 讨论

本方法充分考虑到超声多模式兰姆波的频散特性, 通过不断调整倾斜函数, 使频散变换具有最佳的时频聚集性, 并从二维的时频图来估计多模式兰姆波的时间延迟。从仿真结果(图 1)看, 此方法取得了较理想的时延估计结果。仿真的目的是检验本方法的实际估计效果(即可行性), 其优点是可以人为设定精确的时延, 进而可以将本方法的估计结果与原设定的精确值作对比, 进行误差分析(见图 2)。与传统的广义相关方法(一般方法)相比, 在传播距离较短时, 即多模式波的重叠区较多时, 其估计结果有较大的改善。在传播距离很长时, 多模式波在时域上已分离, 各模式波的互相串扰不大, 此时各种方法的估计精度相差无几。若估计精度要求不是很高时, 可以选择倾斜函数固定的频散变换, 以提高时延估计速度。从实验结果来看(如图 5、图 7 和图 9), 也能得到较好的估计结果。如当传播距离为 50 mm 时, 采用直接相关方法对所接收到的兰姆波进行时延估计, 估计结果参见表 3。由此可见本文的方法可以估计出 3 个模式波的时间延迟信息, 而直接相关方法却只能估计出  $S_0$  单个模式的时间延迟, 进一步证明了本文方法的优越性。

表 3 本方法与直接相关法估计传播距离为 50 mm 时的多模式兰姆波的时延结果

	$A_0$	$A_1$	$S_0$
本文方法	29.78 $\mu s$	31.20 $\mu s$	26.54 $\mu s$
直接相关法	—	—	27.19 $\mu s$

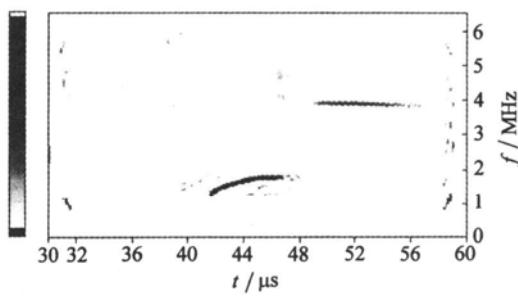


图 9 自适应频散变换处理图 8 中多模式超声兰姆波信号的时频图

本文在时间延迟信息的提取过程中, 引入了一个窗口的设置问题, 这样就加进去了一些人为因素, 可能因为不同的人窗口的设置不同而得到稍有不同的

估计。在以后的工作中, 这方面还需要作一些改进和完善, 以便做到完全自动的提取。

## 参 考 文 献

- Lamb H. On the waves in an elastic plate. *Proc. R. Soc. London, Ser.*, 1917; **A93**: 114—120
- Knapp C H, Cartar G C. The generalized correlation method for estimation of time delay. *IEEE ASSP*, 1976; **24**(4): 320—327
- Reed F A, Feintuch P L, Bershad N J. Time delay estimation using the LMS adaptive filterer-static behavior. *IEEE Trans. SP*, 1981; **29**(3): 561—571
- Schultheiss P M, Messer H, Gadi Shor. Maximum likelihood time delay estimation in non-gaussian noise. *IEEE Trans. SP*, 1997; **45**(4): 2571—2575
- 邱天爽, 王宏禹. 几种基本时延估计方法及其相互关系. 大连理工大学学报, 1996; **36**(4): 230—235
- Chan Y T, So H C, Ching P C. Approximate maximum likelihood delay estimation via orthogonal wavelet transform. *IEEE Trans-SP*, 1999; **47**(4): 1193—1198
- 朱正亚. 短源距全波列声波测井的数据处理. 应用声学, 1989; **8**(4): 1—5
- 行鸿彦, 刘照泉, 万明习. 基于小波变换的超声多模式兰姆波参量时延估计. 声学学报, 2001; **26**(3): 239—246
- Mann S, Haykin S. The generalized logon transform (GLT). *Vision Interface 91*, 1991
- Mihovilovic D, Bracewell R N. Adaptive chirplet representation of signals on time-frequency plane. *Electronics Letters*, 1991; **27**(13): 1159—1161
- Mann S, Haykin S. Chirplet transform: physical considerations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995; **43**(11): 2745—2761
- Richard G Baraniuk, Douglas L Jones. Wigner-based formulation of the chirplet transform. *IEEE Trans Signal Processing*, 1996; **44**(12): 3129—3135
- J C, Poisson F, Depollier C, Simon L. High-speed moving source analysis using chirplets. *IEEE Signal Processing Letters*, 1999; **6**(5): 113—115
- WANG Genyuan, BAO Zheng. Inverse synthetic aperture radar imaging of maneuvering targets based on chirplet decomposition. *Optical Eng*, 1999; **38**(9): 1534—1541
- Wang J J, Zhou J. Aseismic designs based on artificial simulations - How to achieve chirplet-based signal approximation with a strong earthquake ground-model. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1999; **16**(2): 94—99
- Mann S, Haykin S. Adaptive “chirplet” transform: an adaptive generalization of the wavelet transform. *Optical Engineering*, 1992; **31**(6): 1243—1256
- Richard G Baraniuk. Signal-dependent time frequency analysis using a radially gaussian kernel. *Elsevier; Signal Processing*, 1993; **32**(3): 263—284
- Abbate A, Koay J, Frankel J et al. Signal detection and noise suppression using a wavelet transform signal processor: application to ultrasonic flaw detection. *IEEE Trans On UFFC*, 1997; **14**(1): 14—25