

# 弱界面固体附层媒质中的类 Rayleigh 波\*

陈 晓 万明习

(西安交通大学电子与信息工程学院生物医学工程系 西安 710049)

2000 年 4 月 28 日收到

**摘要** 当半无限大固体媒质上有一层固体附加层时表面波是频散的。由界面的“准弹簧”模型,本文导出了有各向同性固体附加层时半无限大各向同性均匀媒质中弱界面情况下的类 Rayleigh 波的特征方程。文中给出了典型复合结构具有刚性联接界面、滑移联接界面和弱界面时类 Rayleigh 波的色散曲线,分析了界面刚度系数对类 Rayleigh 波传播速度的影响。数值计算的结果表明选择合适的参数可以由低频超声类 Rayleigh 进行涂层结构界面特性的无损评价。

PACS 数: 43.20, 43.35

## The quasi-Rayleigh waves in a solid layered media with a weak interface

CHEN Xiao WAN Mingxi

(Department of Biomedical Engineering, Xi'an Jiaotong University Xi'an 710049)

Received apr. 28, 2000

**Abstract** The Rayleigh waves in a solid layered media is dispersive. Using the “spring” model for a weak interface between two solids, the characteristic equation for the Quasi-Rayleigh waves in an isotropic solid layered isotropic media with a weak interface is presented. The numerical results for the typical coating structure with rigid, slip and weak interface are shown in this paper. The influence of the interface stiffness constants on the velocity of the quasi-Rayleigh waves is considered. The numerical results show that the interface characteristics of the coating structure can be nondestructively evaluated by employing the quasi-Rayleigh waves in the low frequency band.

## 引言

表面涂层结构在航空、航天、航海、生物医学工程等众多领域被广泛应用和研究。媒质层与层之间的界面特性是影响其力学特性的重要因素,在无损检测和评价领域,对涂层结构界面的联接质量进行检测一直是极为重要的研究课题。

当半无限大各向同性固体媒质上有一层各向同性固体附加层时媒质中传播的表面波是频散的,称为类 Rayleigh 波。至今对半无限均匀各向同性固体媒质上有一层各向同性固体附加层时类 Rayleigh 波的频散方程有较多的研究<sup>[1-5]</sup>,但是都假设界面是刚性联接的,即应力和位移在界面处连续。层状复合材料在使用的过程中,由于界面层的疲劳和老化,形成所谓的弱界面。界面层的刚度系数是描述界面层特性的最重要的参数,与媒质中波的传播特性密切

相关,所以超声导波已成为评价复合媒质界面特性的一种重要技术<sup>[4,6-10]</sup>。本文研究有各向同性固体附加层时半无限各向同性均匀媒质弱界面情况下类 Rayleigh 波的频散特性。导出了类 Rayleigh 的特征方程,并给出一些典型结构具有刚性联接、滑移联接和弱界面时数值计算的色散曲线的结果。以铜/铁结构为例,讨论界面刚度系数对类 Rayleigh 波传播速度的影响,为用低频超声类 Rayleigh 进行弱界面的超声无损检测和评价提供理论基础。

## 1 理论

设如图 1 所示的半无限各向同性均匀媒质上有一层固体附加层的媒质系统,取坐标如图所示。板在  $y$  方向无限延伸并且位移梯度为零。声波沿  $x$  方向传播。 $z < 0$  为半无限固体媒质。

\* 国家自然科学基金资助项目

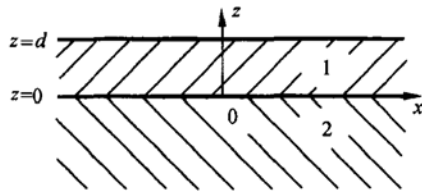


图 1 有固体附加层的半无限媒质示意图

设媒质中纵波和横波的位移势函数分别是  $\phi_i$  和  $\psi_i$  ( $i = 1, 2$ ), 下标 1 和 2 分别表示附加层和无限固体媒质, 声波随时间简谐变化, 则位势函数满足 Helmholtz 方程<sup>[11]</sup>:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_1 + k_{11}^2 \phi_1 = 0, \\ \nabla^2 \psi_1 + k_{11}^2 \psi_1 = 0, \\ \nabla^2 \phi_2 + k_{22}^2 \phi_2 = 0, \\ \nabla^2 \psi_2 + k_{22}^2 \psi_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $k_{1i}$  和  $k_{2i}$  分别为媒质 1 和 2 中的纵横波的波矢量。

设沿  $x$  方向行进的简谐声波的位势函数为:

$$\begin{cases} \phi_1 = (A \cosh(q_1 z) + B \sinh(q_1 z)) e^{i(\omega t - kx)}, & 0 \leq z \leq d, \\ \psi_1 = (C \cosh(s_1 z) + D \sinh(s_1 z)) e^{i(\omega t - kx)}, & 0 \leq z \leq d, \\ \phi_2 = E e^{q_2 z} e^{i(\omega t - kx)}, & z \leq 0, \\ \psi_2 = F e^{s_2 z} e^{i(\omega t - kx)}, & z \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $k$  是沿  $x$  方向传播的波矢  $k = \omega/c$ ,  $c$  为类 Rayleigh 波的相波速。  $q_1$ 、 $s_1$ 、 $q_2$  和  $s_2$  定义如下:

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{k^2 - k_{11}^2}, & s_1 = \sqrt{k^2 - k_{12}^2}, \\ q_2 = \sqrt{k^2 - k_{22}^2}, & s_2 = \sqrt{k^2 - k_{22}^2}. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \mu_1(k^2 + s_1^2) & 0 & 0 & -2iks_1\mu_1 & -\mu_2(k^2 + s_2^2) & 2iks_2\mu_2 \\ 0 & 2ikq_1\mu_1 & \mu_1(k^2 + s_1^2) & 0 & -2ikq_2\mu_2 & -\mu_2(k^2 + s_2^2) \\ (k^2 + s_1^2)\cosh(q_1 d) & (k^2 + s_1^2)\sinh(q_1 d) & -2iks_1\sinh(s_1 d) & -2iks_1\cosh(s_1 d) & 0 & 0 \\ 2ikq_1\sinh(q_1 d) & 2ikq_1\cosh(q_1 d) & (k^2 + s_1^2)\cosh(q_1 d) & (k^2 + s_1^2)\sinh(q_1 d) & 0 & 0 \\ -ikK_T & 2ikq_1\mu_1 & \mu_1(k^2 + s_1^2) & -s_1 K_T & ikK_T & s_2 K_T \\ -\mu_1(k^2 + s_1^2) & q_1 K_N & -ikK_N & 2iks_1\mu_1 & -q_2 K_N & ikK_N \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

上式即为弱界面有限厚度固体附层半无限媒质中类 Rayleigh 波的特征方程。求解可得到类 Rayleigh 波各模式的相速度。

对理想的刚性联接界面,  $K_N \rightarrow \infty$  和  $K_T \rightarrow \infty$ , 但是应力必须为有限值, 所以此时界面的法向

声场中质点位移的  $x$  方向、 $z$  方向分量  $U$  和  $W$  以及  $z$  方向的法向应力  $\sigma$  和  $xOz$  平面内的切应力  $\tau$  为:

$$\begin{cases} U = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ W = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \sigma = \lambda \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right), \\ \tau = \mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\lambda$  和  $\mu$  为材料的 Lamé 常数。

界面层是一层力学参数与两边固体媒质力学参数不同的薄层。在复合媒质使用过程中, 界面处会出现微裂纹, 力学强度降低, 形成弱界面层。弹簧模型可以描述平面状弱界面的物理特性, 并由此可得到界面处力学量的边界条件<sup>[12-14]</sup>。在该模型中, 设法向刚度系数和切向刚度系数分别为  $K_N$  和  $K_T$ , 则界面层处的边界条件为:

$$\begin{cases} K_T(U_1 - U_2) = \tau_1, \\ K_N(W_1 - W_2) = \sigma_1, \\ \sigma_1 = \sigma_2, \\ \tau_1 = \tau_2. \end{cases} \quad (4)$$

附加层上表面为自由边界, 其法向和切向应力分量等于零:

$$\begin{cases} \sigma_1|_{z=d} = 0, \\ \tau_1|_{z=d} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

将式 (2) 和 (3) 代入边界条件 (4) 和 (5), 可以得到以  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  和  $F$  为变数的矩阵方程。要使此线性方程组有非零解, 其系数行列式之值必须为零:

和切向应力以及法向和切向位移分别连续

$$\begin{cases} U_1 = U_2, \\ W_1 = W_2, \\ \sigma_1 = \sigma_2, \\ \tau_1 = \tau_2. \end{cases} \quad (7)$$

对滑移联接界面由于界面只能承受垂直于界面的法向应力, 而界面上的切向应力恒为零; 处于滑移界面两边的法向应力和位移连续, 但切向位移不连续, 切向应力为零

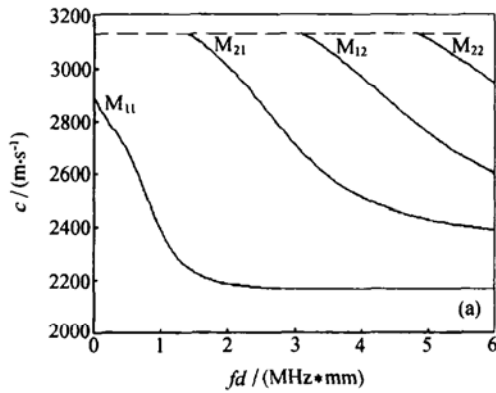
$$\begin{cases} W_1 = W_2, \\ \sigma_1 = \sigma_2, \\ \tau_1 = 0, \\ \tau_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

## 2 数值计算结果与讨论

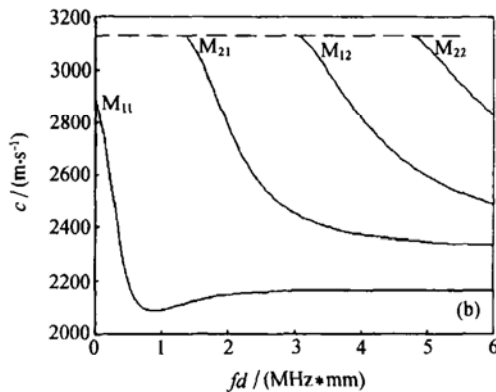
用式 (6) 可以计算有固体附加层的半无限媒质中类 Rayleigh 波的色散曲线。首先计算两种特殊情况即刚性和滑移联接时波的传播特性。选附加层为铜, 厚度  $h = 0.2 \text{ mm}$ , 基体媒质为铁, 计算材料的参数选取如下:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 8930 \text{ kg/m}^3, c_{l1} = 4760 \text{ m/s}, c_{t1} = 2320 \text{ m/s} \\ \rho_2 &= 7800 \text{ kg/m}^3, c_{l2} = 5690 \text{ m/s}, c_{t2} = 3130 \text{ m/s} \end{aligned}$$

图 2(a)、2(b) 分别是刚性和滑移联接时类 Rayleigh 波的相速度  $c$  随频率厚度积  $fd$  的变化曲



(a) 刚性联接界面



(b) 滑移联接界面

图 2 类 Rayleigh 波的频散曲线

线。从图中可以看出, 界面层的特性对类 Rayleigh 波的传播速度有很大影响。  $M_{11}$  模式有两个极值, 分别对应于基层和附加层的 Rayleigh 波速度。当  $fd \rightarrow 0$  时类 Rayleigh 波的速度为基层的 Rayleigh 波波速; 当  $fh \rightarrow \infty$  时类 Rayleigh 波的速度为附加层的 Rayleigh 波波速, 此时类 Rayleigh 波主要在附加层表面传播。其余模式在  $fd \rightarrow \infty$  时都趋近于附加层的横波速度。

弱界面是更一般的情况, 此时  $K_N$  和  $K_T$  为有限值。由于附加层一般都比较薄, 所以只考虑  $M_{11}$  模式。如图 3 所示为表 1 给出的 6 种界面刚度系数条件下  $M_{11}$  模式相速度  $c$  随  $fd$  的变化曲线。随着  $K_N$  和  $K_T$  的逐渐减小, 相速度也逐渐由理想刚性联接时的速度减小到完全脱层时的速度, 此时的频散曲线即是附加层  $A_0$  模式 Lamb 波相速度的频散曲线。

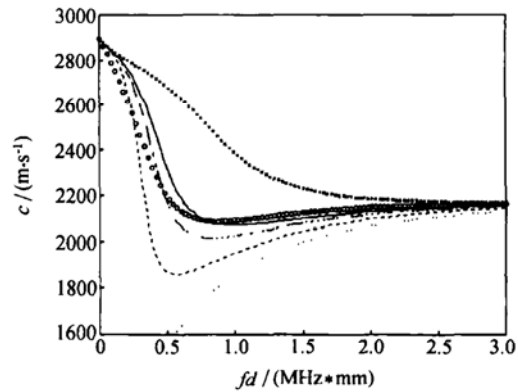


图 3 弱界面  $M_{11}$  模式类 Rayleigh 波相速度的频散曲线

表 1 界面刚度系数 ( $\times 10^{14} \text{ N/m}^3$ )

	$K_N$	$K_T$	图中对应曲线
刚性联接	$\infty$	$\infty$	$\times \times \times \times \times$
弱界面 1	10	4	———
弱界面 2	7	2.5	- - - - -
弱界面 3	3	1.2	- - - - -
滑移联接	$\infty$	0	o o o o o
完全脱层	0	0	.....

为更加清楚地了解其中规律, 图 4 描述了界面法向刚度系数  $K_N$  和切向刚度系数  $K_T$  对  $M_{11}$  模式类 Rayleigh 波传播速度的影响。计算中设  $f = 1 \text{ MHz}$ 。计算  $K_N$  对最低阶类 Rayleigh 波传播速度的影响时假设  $K_T \rightarrow \infty$ , 计算  $K_T$  对  $M_{11}$  模式类 Rayleigh 波传播速度的影响时假设  $K_N \rightarrow \infty$ 。由图 4(a) 可知  $M_{11}$  模式相速度随  $K_N$  的增大而增大,  $K_N$  很小时声波速度趋于附加层  $A_0$  模式 Lamb 波的速度,  $K_N$

很大时声波速度趋于理想刚性联接界面时的速度, 当  $K_N$  在  $10^{12} \sim 10^{15} \text{N/m}^3$  范围时声速变化最大, 而其它值时速度变化比较平稳; 由图 4(b) 可知  $M_{11}$  模式相速度也随  $K_T$  的增大而增大,  $K_T$  很小时声波速度趋于滑移界面情况时的速度,  $K_T$  很大时声波速度趋于理想刚性联接界面时的速度, 与  $K_N$  一样, 当  $K_T$  在  $10^{12} \sim 10^{15} \text{N/m}^3$  范围时声速变化最大, 而其它值时速度变化比较平稳。对比图 4(a)、4(b) 可以看出, 对于  $M_{11}$  模式, 相同条件下相速度对  $K_N$  的变化比  $K_T$  的变化大, 特别是在  $fd$  比较小的时候。这说明  $M_{11}$  模式的相速度对  $K_N$  比  $K_T$  更敏感。

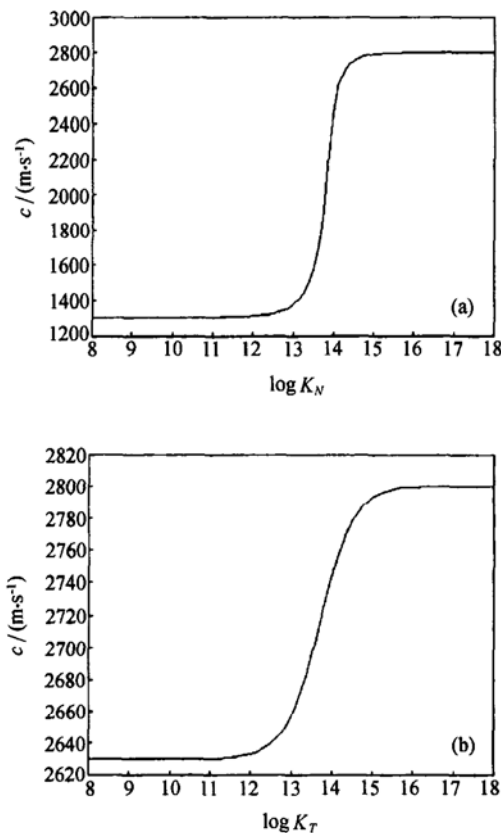


图 4 界面刚度系数 (a)  $K_N(\text{N/m}^3)$  和 (b)  $K_T(\text{N/m}^3)$  对  $M_{11}$  模式类 Rayleigh 波相速度的影响

### 3 结论

本文由弱界面的“准弹簧”模型推导了弱界面各向同性附加层时各向同性半无限媒质中类 Rayleigh 波的特征方程。作为例子, 数值计算了铜/铁复合结

构在刚性联接、滑移联接和弱界面时的频散曲线, 分析了界面刚度系数  $K_N$  和  $K_T$  变化对  $M_{11}$  模式类 Rayleigh 波相速度的变化。数值结果表明在低频段  $M_{11}$  模式类 Rayleigh 波相速度随界面情况的不同有很大变化, 当界面刚度系数在  $10^{12} \sim 10^{15} \text{N/m}^3$  范围内变化时,  $M_{11}$  模式相速度对界面刚度系数最敏感。可通过选择合适的参数由低频类 Rayleigh 定征界面刚度系数。

### 参 考 文 献

- 1 Achenbach J D, Keshava S P. Free waves in a plate supported by a semi-infinite continuum. *J. Appl. Mech.*, 1967; **34**(2): 397—404
- 2 Wewing W M, Janderzky W S, Press F. Elastic waves in layered media. New York: McGraw-Hill, 1957: 189—196
- 3 喻 明, 刘政林, 许克等. 有不同附加层时 Rayleigh 波频散方程. *声学学报*, 1999; **24**(5): 505—509
- 4 Chimenti D E, Nayfeh A G, Butler D L. Leaky Rayleigh waves on a layered halfspace. *J. Appl. Phys.*, 1982; **53**(1): 170—176
- 5 Auld B A. Acoustic field and wave in solids. New York: Wiley, 1973: 94—104
- 6 Pilarski A. Ultrasonic evaluation of the adhesion degree in layered joints. *Material Evaluation*. 1985; **43**(6): 765—770
- 7 Bar-Cohen Y, Mal A K, Yin C C. Ultrasonic evaluation of adhesive Bonding. *J. Adhesion*, 1989; **29**(1-4): 257—274
- 8 Pilarski A, Rose J L. Ultrasonic oblique incidence for improved sensitivity in interface weakness determination. *NDT&E International*, 1988; **21**(4): 241—245
- 9 Hsieh T M, Rosen M. Ultrasonic leaky waves for non-destructive interface characterization. *Ultrasonics*, 1993; **31**(1): 45—51
- 10 Singher L. Bond strength measurement by ultrasonic guided waves. *Ultrasonics*, 1997; **35**(4): 305—315
- 11 Viktorov I A. Rayleigh and lamb waves. New York: Plenum Press, 1967: 1—3
- 12 Rokhlin S I, Wang Y J. Equivalent boundary conditions for thin orthotropic layer between two solids: reflection, refraction and interface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1992; **91**(4): 1875—1887
- 13 Rokhlin S I, Wang Y J. Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids. *J. Acoust. Am.*, 1991; **89**(2): 503—515
- 14 王耀俊, 宁 伟, 朱为勇. 层状复合媒质中的 Lamb 波. *物理学进展*, 1996; **16**(3,4): 363—376
- 15 Wang Y J, Ning W, Ou X. Lamb wave modes in a two layered solid medium with weak interface. *ACTA PHYSICA SINICA (Oversea Edition)*, 1994; **3**(8): 561—566