

# 有粘滞液层负载时薄板中 类 Lamb 波的传播 \*

赵晓亮 朱哲民 杜功焕

(南京大学声学研究所 近代声学国家重点实验室 南京 210093)

1997 年 6 月 12 日收到

1998 年 1 月 12 日定稿

**摘要** 本文从弹性波传播理论出发, 结合边界条件, 导出了薄板一面有粘滞液层负载时板中类 Lamb 波传播的色散方程; 研究了液层粘滞引起的类 Lamb 波衰减。数值计算表明, 板和液层的驻波共振振动引起板中类 Lamb 波对称和反对称模式的模式转换以及衰减系数的变化。文中对  $k_t d \ll 1$  时,  $A_0$  模式类 Lamb 波的微质量和粘滞传感特性也作了讨论。

PACS 数 43.20 43.35

## The propagation of Lamb waves in a plate with one viscous liquid layer loading

ZHAO Xiaoliang ZHU Zhemin DU Gonghuan

(Institute of Acoustics & State Key Lab of Modern Acoustics, Nanjing University Nanjing 210093)

Received June 12, 1997

Revised January 12, 1998

**Abstract** Based on elastic wave propagation theory, a dispersion equation for Lamb waves in a plate with one viscous liquid layer loading is derived. Viscosity-induced attenuation of the wave is discussed. Numerical calculation shows that resonance vibration of the liquid layer and the plate may cause the changing of wave modes and the variation of attenuation due to asymmetrical liquid layer loading. When  $k_t d \ll 1$ , mass and viscosity sensing application of  $A_0$  mode Lamb wave is also discussed.

## 引言

自从 20 世纪初, H. Lamb 最早研究了薄板中弹性波传播以来<sup>[1]</sup>, 这种以他的名字命名的 Lamb 波在理论研究和应用方面均有了很大发展。特别是工程中广泛应用超声 Lamb 波对板状材

\* 国家自然科学基金资助项目。

料构件的缺陷或焊接进行无损检测。Viktorov, Farnell 和 Adler 都曾对 Rayleigh 和 Lamb 波的研究作过很好的总结 [2-4]。

80 年代末, Lamb 波在微传感领域的应用引起了广泛的重视, 特别是 Lamb 波传感器有灵敏度高、损耗小、尺寸小等特点, 使其在物理、化学、生化过程、环境监测等微小变化的实时检测方面有着潜在的应用前景。R. White, Wu 和 Zhu 等都曾对 Lamb 波微传感实验和理论作过深入研究 [5,6]。

近年来, 粘滞传感以及粘滞引起的导波衰减得到重视, 因为实际负载流体都具有不同程度粘滞性。B. A. Martin 研究 Lamb 波粘滞传感器件并发现  $A_0$  模式的衰减正比于流体切变粘滞系数与密度乘积的平方根 [7]; Yuan Liu, Nagy 和 Nayfeh 等对粘滞引起的导波的衰减作了较系统的理论研究 [8,9]。Zhu 和 Wu 研究了粘滞流体对 Rayleigh 波以及对称负载 Lamb 波传播的影响 [10,11], 然而对传感中更具有实际意义的情况, 即薄板一侧有粘滞液层负载时板中类 Lamb 波传播特性, 由于失去几何对称性带来的困难, 尚未见有文献报道。本文从弹性波传播理论出发, 系统计算了上述情况下的色散方程、粘滞引起的 Lamb 波衰减以及模式转换等, 为进一步发展 Lamb 波微传感技术提供必要的理论基础。

## 1 理论

选取坐标系如图 1 所示: 各向同性薄板厚度为  $2d$ , 其在  $X$ 、 $Y$  方向无限延伸。板的一面有厚度为  $h$  的粘滞液层负载, 声波在  $X$  方向传播。本文的讨论限于频率不是很高 (例如 10 MHz 以下), 小振幅线性声波的情况。关于液层中可能出现的非线性效应, 我们将在后继文章中阐述。

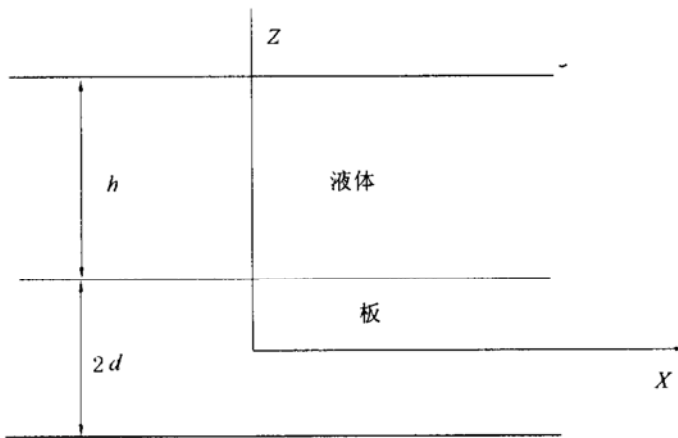


图 1 坐标示意图

在上述条件下, 板中声场满足波动方程, 液层中声场满足线性化的纳维-斯托克斯方程。设板中纵波、横波的速度势函数分别为  $\phi_s$  和  $\psi_s$ , 液层中的势函数分别为  $\phi_L$  和  $\psi_L$ , 忽略热传导损耗, 简谐声波方程可写为 [10]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_s + k_l^2 \phi_s &= 0, \\ \nabla^2 \psi_s + k_t^2 \psi_s &= 0, \\ \nabla^2 \phi_L + k_L^2 \phi_L &= 0, \\ \nabla^2 \psi_L - m^2 \psi_L &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $k_l$ ,  $k_t$ ,  $k_L$  分别为板中纵波、横波以及液体中纵波的波矢;  $m = (1+i)/\delta$ ,  $\delta$  为边界层厚度,  $\delta = \sqrt{2\mu_L/\omega\rho_L}$ .  $\mu_L$ ,  $\rho_L$  分别为液体的切变粘滞系数和密度。

在  $\delta \ll \lambda$  以及  $\delta \ll h$  条件下, 沿  $X$  方向行进的声波速度势为:

$$\begin{aligned} \phi_s &= [A_s \cdot \text{ch}(qz) + B_s \cdot \text{sh}(qz)] e^{i(\omega t - kx)} & -d \leq z \leq d, \\ \psi_s &= [D_s \cdot \text{sh}(sz) + C_s \cdot \text{ch}(sz)] e^{i(\omega t - kx)} & -d \leq z \leq d, \\ \phi_L &= A_1 \cdot \sin\{\gamma[z - (d+h)]\} e^{i(\omega t - kx)} & d \leq z \leq d+h, \\ \psi_L &\approx B_1 \cdot e^{-m(z-d)} \cdot e^{i(\omega t - kx)} & d \leq z \leq d+h. \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $k$  为有粘滞液层负载时板中声波沿  $X$  方向传播的波矢,  $\lambda$  为波长。由于粘滞损耗的影响,

波矢  $k$  为复数, 其虚数部分代表声波的衰减。  $q, s, \gamma$  为引入的符号, 它们是  $q = \sqrt{k^2 - k_t^2}$ ,  $s = \sqrt{k^2 - k_t^2}$ ,  $\gamma = \sqrt{k_L^2 - k^2}$  也分别为复数。

声场中沿  $X$  方向、  $Z$  方向的质点振动速度  $U$  和  $W$  分别为:

$$U = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3)$$

(2) 式描述的声场形式解包含了  $A_s, B_a, C_a, D_s, A_1, B_1$  以及  $k$  等七个未知数, 它们可由边界条件确定。即:

a) 板中法向应力  $\sigma_{zz} = \left[ \lambda \left( \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x \partial z} \right) \right] / (i\omega)$  在自由面  $z = -d$  处为 0; 在固液界面  $z = d$  处与液体中的法向应力  $\rho_L \left( \frac{\partial \phi_L}{\partial t} \right) + 2\mu_L \left( \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial x \partial z} \right)$  连续。

b) 板中切向应力  $\sigma_{xz} = \mu \left( \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x \partial z} \right) / (i\omega)$  在自由面  $z = -d$  处为 0; 在固液界面  $z = d$  处与液体中的切向应力  $\mu_L \left( \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial x \partial z} \right)$  连续。

c) 固液交界处法向速度、切向速度连续。即:

$$\left. \frac{\partial \phi_s}{\partial x} - \frac{\partial \psi_s}{\partial z} \right|_{z=d} = \left. \frac{\partial \phi_L}{\partial x} - \frac{\partial \psi_L}{\partial z} \right|_{z=d}, \quad \left. \frac{\partial \phi_s}{\partial z} + \frac{\partial \psi_s}{\partial x} \right|_{z=d} = \left. \frac{\partial \phi_L}{\partial z} + \frac{\partial \psi_L}{\partial x} \right|_{z=d}.$$

液层与真空交界的边界条件, 即  $z = d + h$  处法向应力为 0、切向应力为 0, 已经包含于 (2) 式  $\phi_L$  和  $\psi_L$  表达式中将形式解代入这些边界条件, 展开时只保留主要粘滞项而忽略高阶小量, 即可得到关于  $A_s, B_a, C_a, D_s, A_1, B_1$  等未知数的六个方程构成的线性方程组。此方程组有非零解的充要条件是其系数行列式为 0。即:

$$\det \begin{vmatrix} (k^2 + s^2) \cosh(qd) & (k^2 + s^2) \sinh(qd) & -2iks \sinh(sd) \\ (k^2 + s^2) \cosh(qd) & -(k^2 + s^2) \sinh(qd) & 2iks \sinh(sd) \\ 2ikq \sinh(qd) & 2ikq \cosh(qd) & (k^2 + s^2) \cosh(qd) \\ -2ikq \sinh(qd) & 2ikq \cosh(qd) & (k^2 + s^2) \cosh(qd) \\ q \sinh(qd) & q \cosh(qd) & -ik \cosh(sd) \\ ik \cosh(qd) & q \sinh(qd) & s \sinh(sd) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2iks \cosh(sd) & -\frac{\rho_L}{\rho_s} k_t^2 \sin(\gamma h) & 0 \\ -2iks \cosh(sd) & 0 & 0 \\ (k^2 + s^2) \sinh(qd) & 0 & -\frac{i\omega m^2 \mu_L}{\mu_s} \\ -(k^2 + s^2) \sinh(qd) & 0 & 0 \\ -ik \sinh(sd) & -\gamma \cos(\gamma h) & ik \\ s \cosh(sd) & ik \sin(\gamma h) & m \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

展开此式, 即可得到单面粘滞液层负载时板中类 Lamb 波的色散方程:

$$2F_1 F_2 - R(F_1 + F_2) - \frac{2k^2}{\gamma m} \tan(\gamma h) \cdot \left\{ F_1 F_2 + \frac{\rho_L}{\rho_s} k_t^2 (G_1 F_2 + G_2 F_1) + \left( \frac{\rho_L}{\rho_s} k_t^2 \right)^2 G_1 G_2 - \left( \frac{\rho_L}{\rho_s} k_t^4 \right)^2 \frac{qs}{4k^2} [\tanh(qd) + \coth(qd)] [\tanh(sd) + \coth(sd)] \right\} - \frac{\rho_L}{\rho_s} k_t^4 \frac{s}{m} (F_3 + F_4) = 0. \quad (5)$$

其中  $F_1, F_2, F_3, F_4, G_1, G_2, R$  的定义见附录。

不难看出, 当  $\mu_L = 0$  时, 方程 (5) 退化为:

$$2F_1F_2 - R(F_1 + F_2) = 0. \quad (6)$$

这正是无粘滞单面液层负载时板中类 Lamb 波的色散方程<sup>[12,13]</sup>。

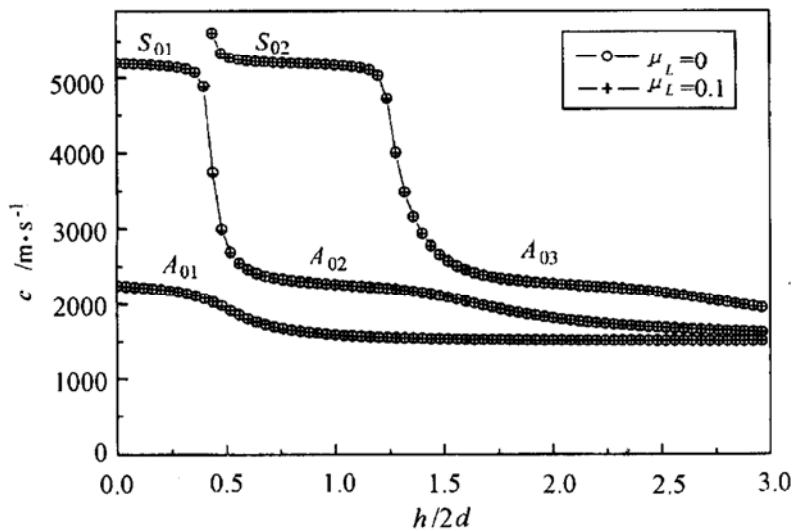
只要从 (2) 式求得  $k$ , 将其代入由边界条件构成的线性方程组中, 即可求出  $A_s, B_a, C_a, D_s, A_1, B_1$  等参数。结合 (2) 式及 (3) 式, 板和液层中的声场分布即可确定。

## 2 数值计算结果与讨论

为了研究粘滞液层负载对 Lamb 波传播的影响, 我们计算了对一定声波频率  $f$ , 改变液层厚度  $h$ 、以及一定液层厚度  $h$ , 改变声波频率  $f$  时声波相速  $c$  和衰减系数  $\alpha$  的变化; 由粘滞系数  $\mu_L$  的改变引起的  $c$  和  $\alpha$  的变化将在粘滞传感部分作介绍。

### 2.1 相速度和衰减系数随液层厚度的变化

以厚度  $2d \approx 0.0954$  cm 铝板和粘滞系数为  $\mu_L = 0.1$  kg/m·s 的水为例。设声波频率为  $f = 1$  MHz, 此时  $k_t d \approx 1$ 。计算时取  $\rho_s = 2.7 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_L = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $c_l = \omega/k_l = 6400$  m/s,  $c_t = \omega/k_t = 3000$  m/s,  $c_L = 1500$  m/s。



(a)

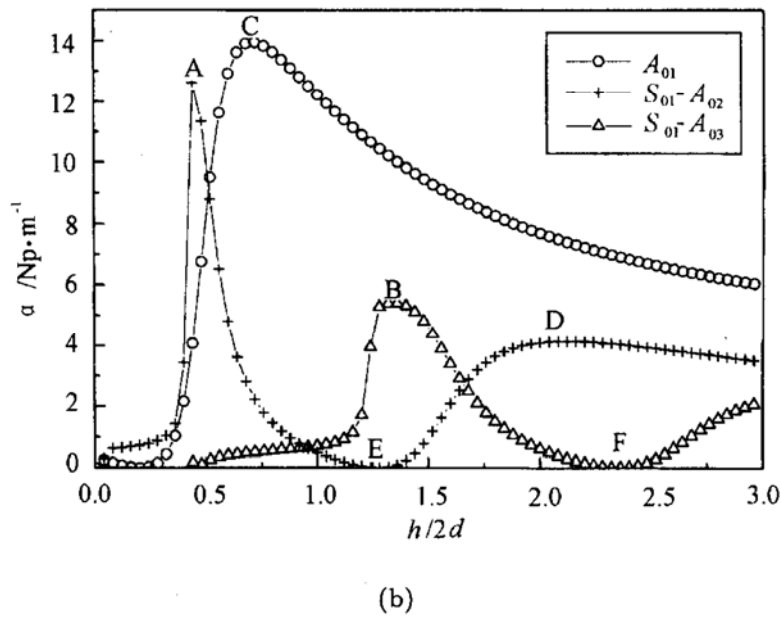


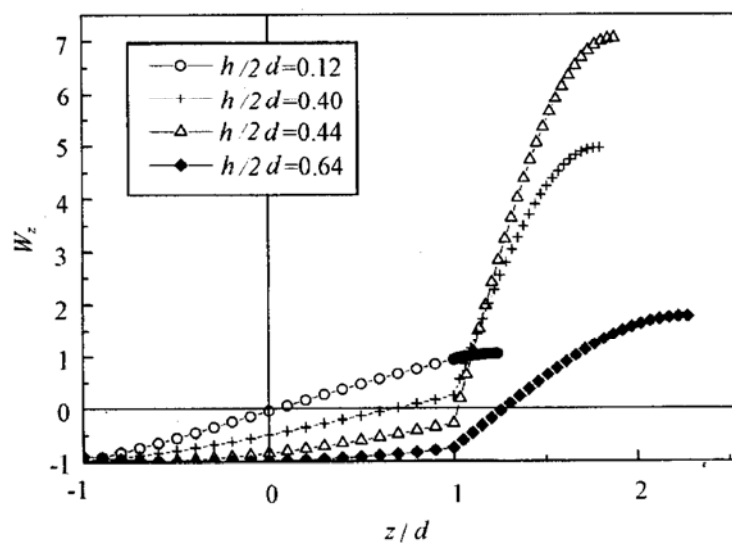
图 2 板中类 Lamb 波 (a) 相速度和 (b) 衰减系数随液层厚度的变化曲线

图 2(a) 为相速  $c$  随  $h/2d$  的变化曲线。图中只画出了三个分支。为便于比较, 图中也给出了理想流体即  $\mu_L = 0$  时相速随  $h/2d$  的变化曲线。可以看出声波传播的相速度主要随液层厚度的变化而改变, 受液体粘滞影响不大; 板中 Lamb 波对称 ( $S$ ) 和反对称 ( $A$ ) 模式耦合在一起, 且随着  $h/2d$  的增大,  $S$  模式向  $A$  模式转换。如  $S_{01}$  模式转化为  $A_{02}$  模式,  $S_{02}$  模式转化为  $A_{03}$  模式等等。

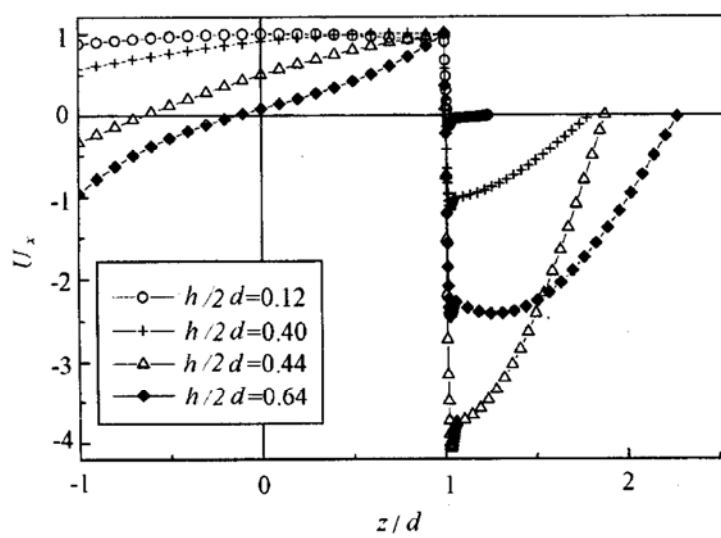
图 2(b) 为衰减系数  $\alpha$  随  $h/2d$  的变化曲线。我们发现液体的粘滞引起了声波的衰减, 且衰减系数对粘滞的变化比较敏感,  $\alpha_{\text{high}}/\alpha_{\text{low}} = \sqrt{\mu_{\text{high}}/\mu_{\text{low}}}$  (图中未画出); 另外, 联系图 2(a), 可以看到衰减系数某些峰值的出现与类 Lamb 波的模式转换有关。研究表明, 这种模式转换和衰减系数的变化与板和液层的驻波共振振动有关。为更好地理解这一点, 我们根据 (2) 式及 (3) 式绘制了不同液层厚度下板和液层中质点振动速度分布曲线, 如图 3(a)、(b)、(c) 所示。

我们知道, 自由空间板中  $S$  模式的 Lamb 波, 其  $X$  方向是行波,  $Z$  方向是驻波, 垂直于板方向的质点振动位移关于板的中心平面对称, 且中心平面法向位移为 0。当板一侧有液层负载时, 驻波场延伸到这一侧的液层中去, 从而法向位移为 0 的平面也偏向于有液层的一边 (图 3(a))。当液层达到一定的厚度时, 这个垂直位移为 0 的平面将会移到液层中。此时板中的垂直位移同向而切向位移反向 (图 3(a)、(b)), 表现出反对称的特性, 因而  $S$  模式转化为  $A$  模式。可以设想, 如果负载对称, 则不会出现中心平面的偏移, 且  $S$  模式和  $A$  模式相互独立, 不会发生模式转换<sup>[11]</sup>。在图 3(a) 中, 当  $h/2d \approx 0.44$  时,  $S$  模式已开始向  $A$  模式转换, 与图 2(a) 中相速度的急剧转换相一致。

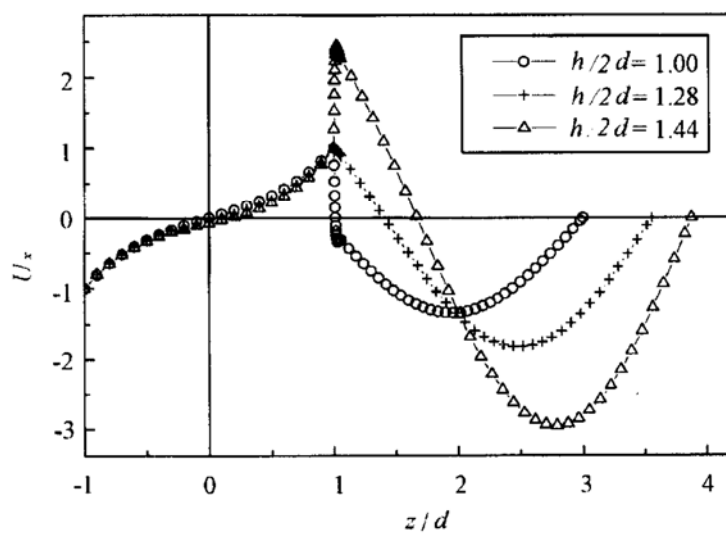
由于负载具有粘滞, 流体中质点的切向振动速度在边界层内变化很快 (见图 3(b)), 声波的衰减也主要由流体在固液交界处的切变粘滞损耗所引起。当模式转换发生时, 法向速度  $W_z$  在交界处取极小值, 而切向速度差  $U_L - U_x$  接近极大, 从而引起较大的损耗, 表现为衰减系数达到一个峰值 (如图 2(b) 中 A、B 点)。其它的峰值 (如图 2(b) 中 C、D 点), 虽然不是模式转换引起, 也可以类似得到解释。如果交界处液层与板的切向位移恰好相同时 (见图 3(c)), 切变粘滞损耗很小, 衰减系数达到极小值 (如图 2(b) 中 E、F 点)。



(a)



(b)



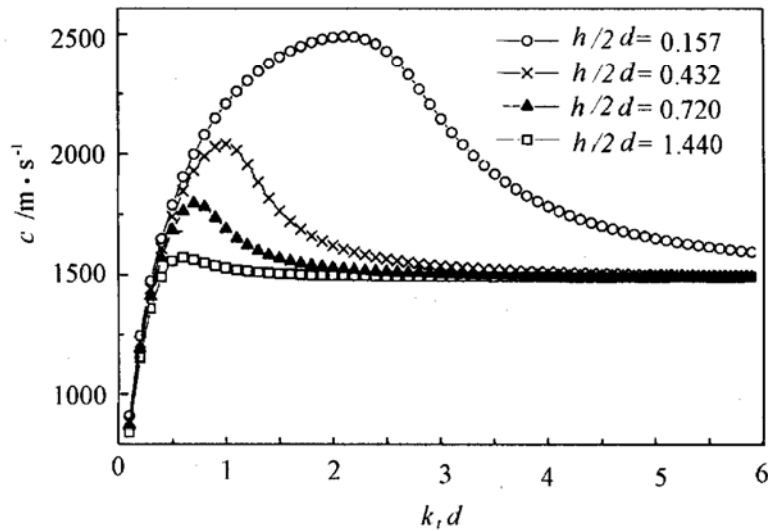
(c)

图 3 板和液体中振动速度分布 (以板中速度归一化):(a) 法向速度, (b)(c) 切向速度

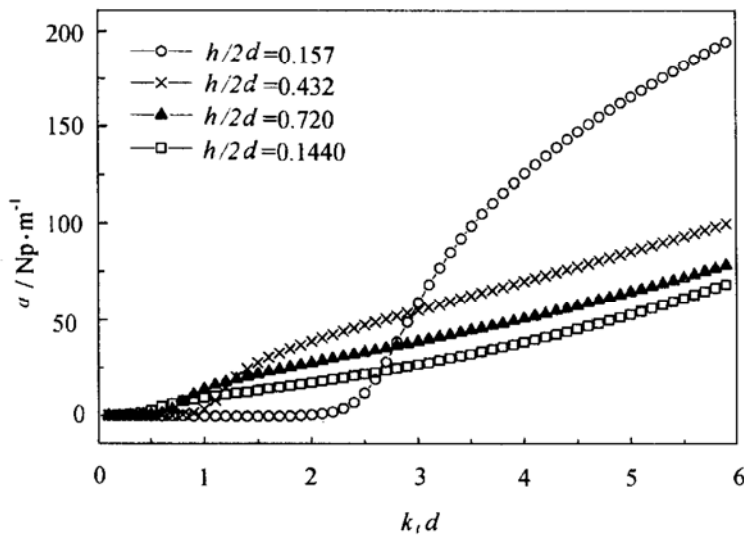
### 2.2 相速度和衰减系数随 $k_t d$ 变化

如果液层厚度一定，声波频率的变化也会引起相速和衰减的改变。图 4(a) 和 5(a) 分别为  $S$  模式和  $A$  模式类 Lamb 波相速随  $k_t d$  的变化曲线。

由下图可以看出，由于液层负载的影响，当  $k_t d$  很大时，相速不再趋于瑞利波波速  $c_R^{[4]}$ ，而是趋于液体中声波波速  $c_L$ 。对  $S$  模式而言，液层越厚，模式转换时的  $k_t d$  越小。图 4(b) 和 5(b) 分别为衰减系数随  $k_t d$  的变化。当  $k_t d$  很大，即  $c \rightarrow c_L$  时，质量负载效应起主要作用，液层中将耦合更多的能量，边界层的粘滞损耗影响相对而言有所下降，故而衰减系数将随  $h$  增大而下降 (如图 2(b) 中 C、D 点后  $\alpha$  幅度下降也说明这一点)。另外，在图 5(b) 中，也可看到模式转换发生时，衰减系数会出现尖峰。



(a)



(b)

图 4  $A_0$  模式类 Lamb 波 (a) 相速度和 (b) 衰减系数随  $k_t d$  的变化曲线

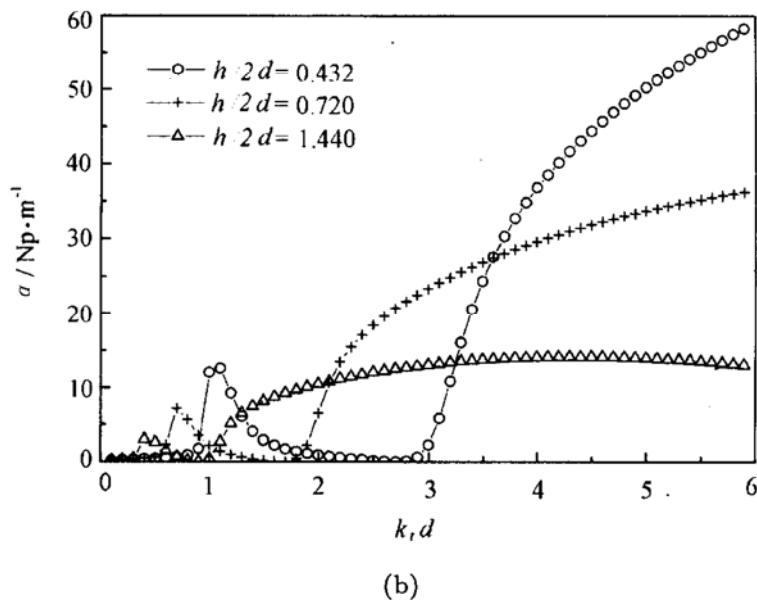
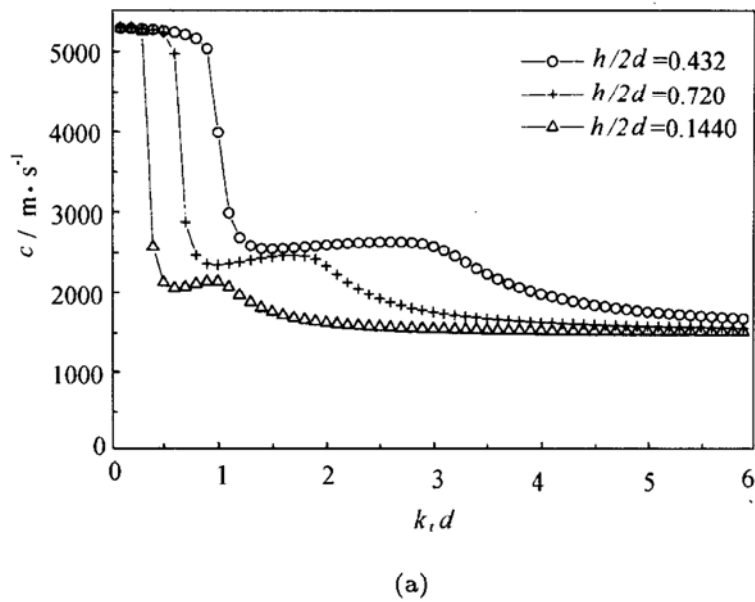


图 5  $S_0$  模式类 Lamb 波 (a) 相速度和 (b) 衰减系数随  $k_1 d$  的变化曲线

### 2.3 微传感方面的应用

传感应用中,能激发  $A_0$  模式 Lamb 波的 ZnO 薄膜是常用的传感器<sup>[7]</sup>。数值计算表明,当液层很薄(近似为板的厚度)时,相速对液层厚度变化很敏感,且近似成线性变化<sup>[13]</sup>,故常被用来作质量传感。但是当  $h$  较大时(接近液体中声波波长),相速不再随  $h$  变化而改变。这是因为对  $k_1 d$  很小的  $A_0$  模式类 Lamb 波,板中相速小于液体中声速,板中能量不会泄漏到液体中去,只有在边界附近会激发指数衰减的界面振动。当液体足够厚时,这种界面振动不再受液层厚度影响,故相速和衰减系数维持为一常数(图 6(a) 和 (b))。利用这一特点,我们可以测量液体的粘滞系数,而不必考虑液层厚度对相速及衰减系数的影响(图 7(a) 和 (b))。例如在医学临床诊断中,许多周围血管疾病都与血液粘滞性的改变有关。正常男性全血粘度为 4.2(与水相比),而动脉硬化性闭塞患者全血粘度达 5.0。如利用上述  $A_0$  模式类 Lamb 波 ZnO 薄膜检测,相速的相对



改变将从正常值  $-0.0016$  变为  $-0.0018$ , 从而便于确诊。

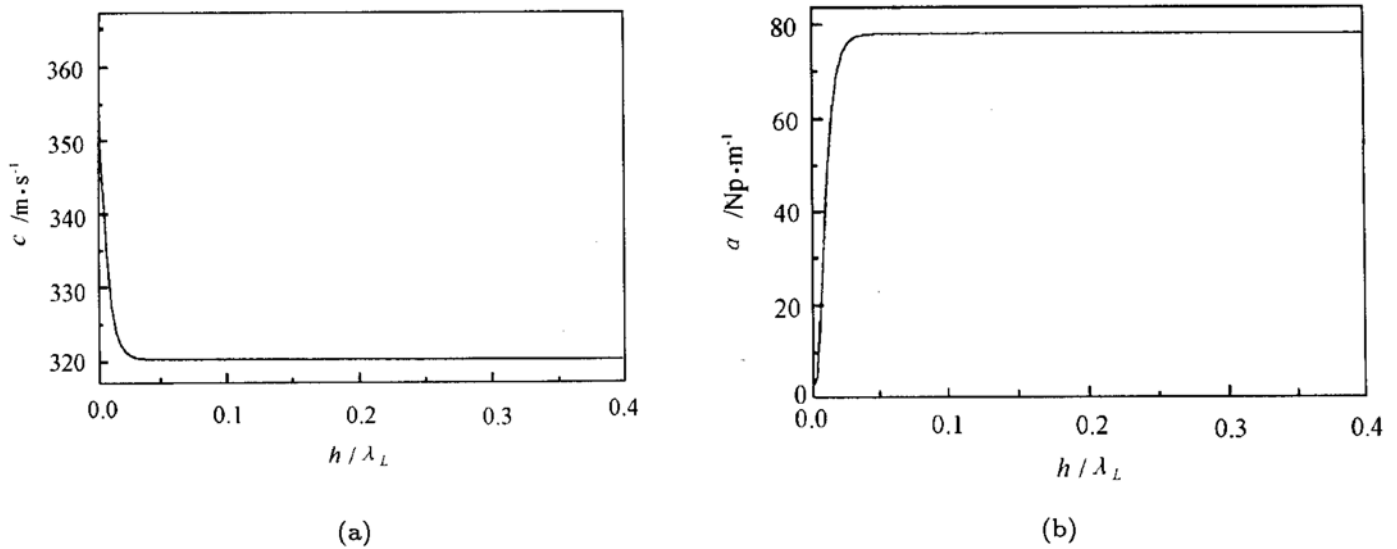


图 6 ZnO 薄膜  $A_0$  模式类 Lamb 波 (a) 相速度和 (b) 衰减系数随液层厚度的变化曲线。计算参数为

$$\rho_s = 5.68 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad C_l = 6400 \text{ m/s}, \quad C_t = 2945 \text{ m/s}$$

$$c_L = 1500 \text{ m/s}, \quad 2d \approx 3 \mu\text{m}, \quad f = 4.7 \text{ MHz}, \quad \mu_L = 0.001 \text{ kg/m} \cdot \text{s}.$$

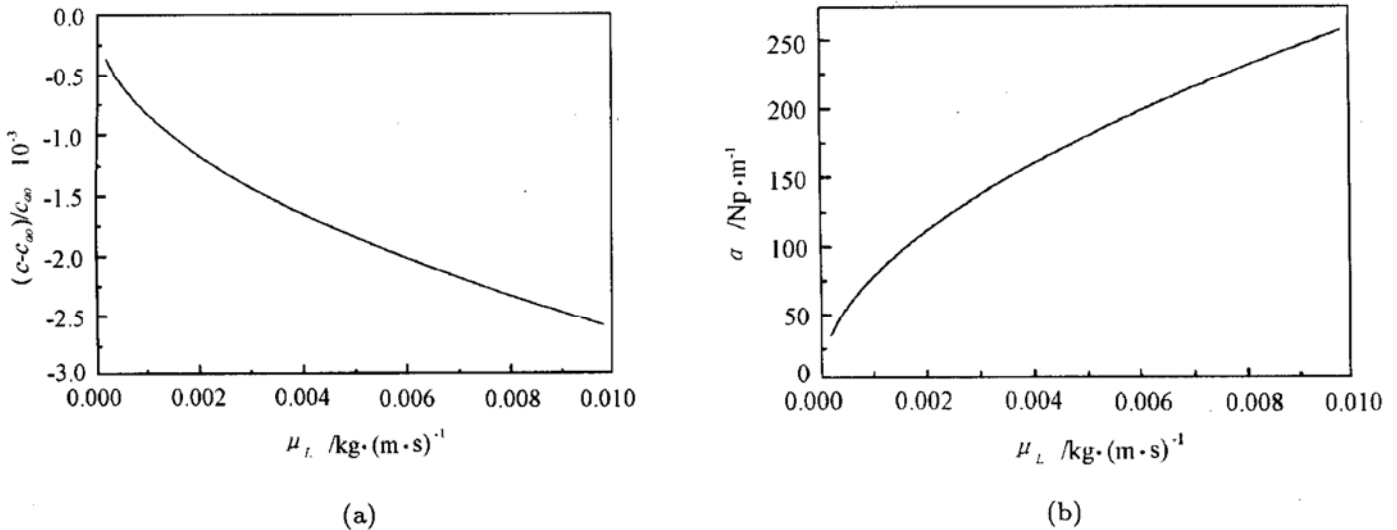


图 7 ZnO 薄膜  $A_0$  模式类 Lamb 波 (a) 相速度和 (b) 衰减系数随液体粘滞系数的变化曲线。参数同图 6

### 3 结论

根据弹性波在各向同性固体板中传播的理论, 结合边界条件, 研究了薄板一面有粘滞液层负载时板中类 Lamb 波的传播, 导得了类 Lamb 波波矢  $k$  的色散方程。由于几何非对称以及板和液层的驻波共振振动, 板中类 Lamb 波的振动模式会随液层厚度或声波激发频率的增加而发生转换, 转换的同时将伴随声波吸收的极大值。衰减系数的变化与液层和板在边界处的切向速度差有关。当板很薄时,  $A_0$  模式类 Lamb 波常用来作微传感器。液层较薄时, 相速对液层厚度变化敏感, 可用来作质量传感; 液层较厚时, 相速和衰减系数不随液层厚度变化, 而随粘滞系数的变化

而改变, 可用来作粘滞传感。

## 附录

$$F_1 = 4k^2qs \cdot \coth(sd) - (k^2 + s^2)^2 \cdot \coth(qd)$$

$$F_2 = 4k^2qs \cdot \tanh(sd) - (k^2 + s^2)^2 \cdot \tanh(qd)$$

$$F_3 = 4k^2qs \cdot \coth(qd) - (k^2 + s^2)^2 \cdot \coth(sd)$$

$$F_4 = 4k^2qs \cdot \tanh(qd) - (k^2 + s^2)^2 \cdot \tanh(sd)$$

$$G_1 = 2qs \cdot \coth(sd) - (k^2 + s^2) \cdot \coth(qd)$$

$$G_2 = 2qs \cdot \tanh(sd) - (k^2 + s^2) \cdot \tanh(qd)$$

$$R = \frac{\rho_L}{\rho_s} k_t^4 \frac{q}{\gamma} \tan(\gamma h)$$

## 参 考 文 献

- 1 Lamb H. On wave in an elastic plate. *Proc. R. London ser.*, 1917, **A93**: 114—120
- 2 Victorov I A. Rayleigh and Lamb waves. *Physical theory and application*, Plenum, New York: 1967
- 3 Farnell G N, Adler E L. Physical acoustics, Principles and methods. 1972, **9**: 35—126
- 4 Viktorov I A. Ultrasonic Lamb waves (review). *Sov. Phys. Acoust.*, 1965, **11**(1): 1—14
- 5 White R M, Wenzel S W. Fluid loading of a Lamb-wave sensor. *Appl. phy. lett.*, 1988, **52**(20): 1653—1655
- 6 Wu Junru, Zhu Zhemin. The propagation of Lamb waves in a plate bordered with layers of a liquid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1992, **91**(2): 861—867
- 7 Martin B A, Wenzel S W, White R M. Viscosity and density sensing with ultrasonic plate waves. *Sensors and Actuators*, 1990, **A704**: 21—23
- 8 Liu Yuan, Martin Viens, David Cheeke. Behavior of extensional modes in a thin rod immersed in viscous medium. *J. Acous. Soc. Am.*, 1996, **99**(2): 706—712
- 9 Peter B Nagy, Adnan Nayfeh. Viscosity-induced attenuation of longitudinal guide waves in fluid-loaded rods. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1996, **100**(3): 1501—1508
- 10 Wu Junru, Zhu Zhemin. An alternative approach for solving attenuated leaky Rayleigh waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, **97**(5): 3191—3193
- 11 Zhu Zhemin, Wu Junru. The propagation of Lamb waves in a plate bordered with a viscous liquid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, **98**(2): 1507—1064
- 12 Zhu Zhemin, WU Junru, Li Jian, Zhou Wei. A general dispersion relation of Lamb wave sensors with liquid-layer loading. *Sensors and Actuators*, 1995, **A49**: 79—84
- 13 朱哲民, 李 剑, 邹 薇. 有液层负载时薄板中类 Lamb 波的传播. *声学学报*, 1996, **21**(2): 174—181