

# 一种自适应滤波中步长因子调节的算法

陈 庚

(中国科学院声学研究所, 声场声信息国家重点实验室, 北京, 100080)

1991 年 6 月 21 日收到

**摘要** 本文在研究时变信道的自适应匹配中, 采用了多途信道的横向滤波器模型(MA 模型), 为求滤波器权系数应用的是最小均方误差滤波方法. 在最小均方误差滤波中无论是采用最陡下降法(Steepest Descent Method), 还是最小均方算法(LMS Algorithm), 在叠代方程中都要引入步长因子  $\mu$ . 以往对  $\mu$  的取值只推导出一个范围  $0 < \mu < 1/\lambda_{\max}$ ,  $\lambda_{\max}$  为采集信号自相关矩阵的最大本征值, 且在叠代过程中是一个常数. 但究竟取多大值? 取小了自适应叠代方程收敛慢, 取大了误差能量函数产生振荡, 甚至发散. 为寻找一种快速收敛的自适应滤波方法, 以适应信道的时变特性时发现, 对叠代步长因子  $\mu$  作自适应调节, 会使收敛速度有明显提高.

## An algorithm of step-size factor adjustment in the adaptive filter

CHEN Geng

(State Key Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, Academia Sinica)

Received June 21, 1991

**Abstract** In this paper a model of transversal filter is presented to study the adaptive match of the time-variant channel. A least mean square error filtering method is used to obtain the weighting coefficients of the filter.

The factor of step size  $\mu$  is always in need when using the steepest descent method as well as the LMS algorithm to solve the adaptive iteration equation. In the past, only a limit as  $0 < \mu < 1/\lambda_{\max}$  was given to the iterative step size  $\mu$ , where  $\lambda_{\max}$  is a maximum eigenvalue of the data correlation matrix and  $\mu$  remains as a constant during the iteration. However, it is very difficult to find an optimal value of  $\mu$ . In case of small  $\mu$ , the convergence speed of the adaptive iteration equation is rather slow. On the contrary, the function of error energy will oscillate or diverge if the  $\mu$  is too big. With the purpose to speed the convergence of the iteration equation of the adaptive filtering, in this paper an adaptive adjustment of iterative step size is deduced. The result of the computer simulation shows that, in the case of using the adaptive  $\mu$  the convergence speed of the iteration equation is increased about 2 times in comparison with constant  $\mu$ . The study suggests that the adaptive filter with adaptive  $\mu$  will be able to follow the time-variant characteristics of the channel.

## 一、引言

海洋声传输信道多为时空变信道。水声信号作为信息载体，经信道传输之后常发生畸变。畸变信号使相干接收机的处理增益下降。例如拷贝相关接收机的理论增益应是  $2TW$  ( $T$  为信号长度， $W$  为信号带宽)。但在实际应用中常常达不到。主要原因有两个，一是噪音中含有信号的相干成份（例如混响），二是信道对信号的加权，使信号产生畸变。对于远程探测和水声通讯来讲后者是主要原因。接收机处理增益下降使检测概率下降，虚警概率增加，使通讯的误码率增加。早在六十年代人们就开始研究信道的修正匹配方法，文献<sup>[1]</sup>对早期提出的几种方法及其局限性作了简单的介绍。纵观各种方法，重要的一步都是求信道响应函数。如果将时变信道类比为滤波器，其权系数是时间的函数。则实时求解滤波器的权系数是实现信道修正匹配的关键所在。

海洋信道一般可分解为随机部分和相干部分。随机部分的匹配要从了解其概率分布出发，用估计匹配的方法来改善接收处理效果。本文重点研究信道相干部分的修正匹配。采用横向滤波器模型（参量模型中的动平均模型）来描述信道，提出一种适用于时变信道的自适应匹配方法。为此，首先用最小均方误差滤波方法求解滤波器权系数。在最小均方误差滤波中，无论是采用最陡下降法，还是最小均方算法，都要用到自适应叠代方程。为了在解自适应叠代方程时，使权系数快速收敛到权的最佳值上，本文推导了一种自适应调节的叠代步长因子。使用结果使权系数的收敛速度提高了将近一倍。如果用所求出的权系数与发射信道卷积，再与接收信号求相关，相关输出送判决器，则可以达到信道的修正匹配。

## 二、最小均方误差滤波

设  $X_N(n)$  为采集信号， $d(n)$  为期望信号，它们的互相关函数为

$$P_N = E\{d(n) \cdot X_N(n)\} \quad (1)$$

采集信号的自相关函数为

$$R_{NN} = E\{X_N(n) \cdot X_N^T(n)\} \quad (2)$$

设滤波输出为  $\hat{d}(n)$ ，它与期望信号之差为

$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n), \quad (3)$$

误差平方为

$$e^2(n) = [d(n) - \hat{d}(n)]^2. \quad (4)$$

当期望信号是一个随机过程时，误差的平方也是一个随机过程，它的一阶统计量是均方误差，

$$\epsilon(n) = E\{e^2(n)\}. \quad (5)$$

设滤波器的权系数为  $W_N(n)$

$$\hat{d}(n) = W_N^T(n)X_N(n), \quad (6)$$

式中

$$\mathbf{W}_N^T(n) = [W_0(n), W_1(n), \dots, W_{N-1}(n)] \quad (7)$$

$$\mathbf{X}_N^T(n) = [X(n), X(n-1), \dots, X(n-N+1)] \quad (8)$$

$$\varepsilon(W_N) = E\{e^2(n)\} = E\{[d(n) - \mathbf{W}_N^T(n)\mathbf{X}_N(n)]^2\} \quad (9)$$

$$[d(n) - \mathbf{W}_N^T(n)\mathbf{X}_N(n)]^2 = d^2(n) - 2\mathbf{W}_N^T(n)d(n)\mathbf{X}_N(n) + \mathbf{W}_N^T(n)\mathbf{X}_N^2(n)\mathbf{W}_N \quad (10)$$

$$\varepsilon(W_N) = E\{d^2(n)\} - 2\mathbf{W}_N^T E\{d(n)\mathbf{X}_N(n)\} + \mathbf{W}_N^T E\{\mathbf{X}_N(n)\mathbf{X}_N^T(n)\}\mathbf{W}_N \quad (11)$$

将 (1), (2) 代入 (11) 得

$$\varepsilon(W_N) = \sigma_d^2 - 2\mathbf{W}_N^T P_N + \mathbf{W}_N^T R_{NN} \mathbf{W}_N \quad (12)$$

式中  $\sigma_d^2$  为期望信号方差.

对 (12) 式取  $\mathbf{W}_N$  的导数, 并令其等于零, 得到

$$R_{NN} \mathbf{W}_N^* = P_N \quad (13)$$

式中  $\mathbf{W}_N^*$  为误差最小时的滤波器权系数. 方程 (13) 称正则方程, 可以用最陡下降法求解. 求解时要用到叠代方法. 设叠代次数为  $n$ , 则权矢量将是  $n$  的函数, 写成  $\mathbf{W}_N(n)$ . (12) 式的均方误差也是  $n$  的函数, 写成

$$\varepsilon(n) = \sigma_d^2 - 2\mathbf{W}_N^T(n)P_N + \mathbf{W}_N^T(n)R_{NN}\mathbf{W}_N(n) \quad (14)$$

式中

$$\varepsilon(n) = \varepsilon[\mathbf{W}_N(n)]$$

对 (14) 式取  $\mathbf{W}_N$  的导数, 得误差函数梯度

$$\nabla_W[\varepsilon(n)] = -2P_N + 2R_{NN}\mathbf{W}_N(n) \quad (15)$$

$$\mathbf{W}_N(n+1) = \mathbf{W}_N(n) - \mu \nabla_W[\varepsilon(n)] \quad (16)$$

将 (16) 式代入 (15) 式得到

$$\mathbf{W}_N(n+1) = \mathbf{W}_N(n) + 2\mu[P_N - R_{NN}\mathbf{W}_N(n)] \quad (17)$$

在以前的文献 [2] 中, 叠代方程的步长因子给定的范围是

$$\alpha = 2\mu \quad (18a)$$

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (18b)$$

式中  $\lambda_{\max}$  是自相关矩阵  $R_{NN}$  的最大本征值.

从 (17) 式看出, 最陡下降法要求数据的时间序列  $d(n)$  和  $\mathbf{X}(n)$  的二阶统计量确知, 也就是说  $d(n)$  和  $\mathbf{X}(n)$  应是平稳时间序列. 如果不满足这一条件时, 比如  $d(n)$  和  $\mathbf{X}(n)$  是非平稳时间序列, 则可以用一种称为最小均方误差 (LMS) 的随机自适应算法. 它与最陡下降法不同之

处在于推导误差能量梯度时用的是从时间序列  $d(n)$  和  $X(n)$  估计所得的自相关函数和互相关函数. 而算出来的权系数是起伏且有一定方差.

假设真值的梯度为  $\nabla_w$ , 而估计的为  $\hat{\nabla}_w$

$$\hat{\nabla}_w[\varepsilon(n)] = -2\hat{P}_N + 2\hat{R}_{NN}W_N(n) \quad (19)$$

式中  $\hat{R}_{NN}$  和  $\hat{P}_N$  为自相关函数和互相关函数的估计值.

$$\nabla_w[\varepsilon(n)] = \frac{\partial}{\partial W_N} E\{e^2(n)\} = 2E\{e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial W_N}\}$$

式中误差函数

$$e(n) = d(n) - W_N^T(n)X(n)$$

$$\frac{\partial e(n)}{\partial W_N} = -X_N(n)$$

$$\nabla[\varepsilon(n)] = -2E\{e(n)X_N(n)\} \quad (20)$$

$$\hat{\nabla}_w[\varepsilon(n)] = -2\hat{E}\{e(n)X_N(n)\} \quad (21)$$

与 (17) 式同理

$$W_N\{n+1\} = W_N(n) + \alpha\hat{E}\{e(n)X_N(n)\} \quad (22)$$

式中  $\hat{E}\{\cdot\}$  为期望值的估计. 为了减少运算量, 用一个近似办法导出 LMS 算法, 即用函数的瞬时值代替期望值

$$\hat{E}\{e(n)X_N(n)\} = e(n)X_N(n) \quad (23)$$

将 (18a), (23) 式代入 (22) 式得

$$W_N(n+1) = W_N(n) + 2\mu e(n)X_N(n) \quad (24)$$

必须指出的是, 只有当  $n \rightarrow \infty$  时 LMS 算法求得权的均值才收敛到  $W_N^*$  最佳值上.

### 三、用横向滤波器模拟多途信道及信道的修正匹配

海洋声传播信道是时空变信道, 如图 1 所示可以类比成时变滤波器<sup>[3]</sup>

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t W(t-\tau, t)X(t)d\tau \quad (25)$$

式中  $W(t)$  为信道响应函数. 如用参量模型来描述信道, 则属于动平均模型的横向滤波器较为合适 (见图 2).

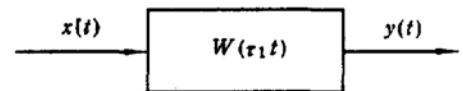


图 1 时空变信道模型

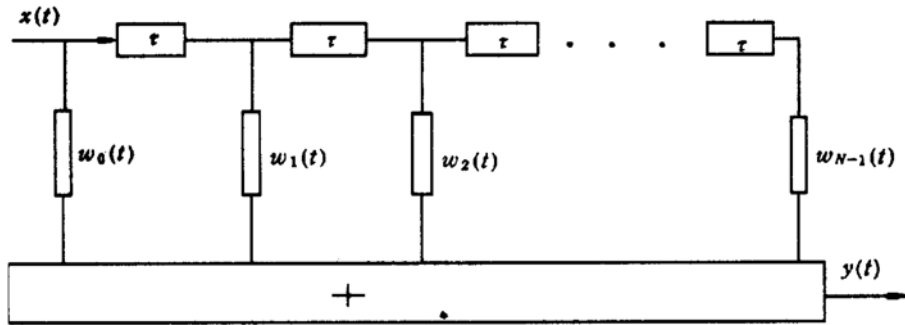


图 2 用来模拟多途信道的横向滤波器

滤波器的传递函数

$$W(\omega) = W_0(t) + W_1(t)Z^{-1} + W_2(t)Z^{-2} \dots + W_{N-1}(t)Z^{-(N-1)} \tag{26}$$

式中  $Z = e^{i\omega t}$

在声呐信号处理中常用拷贝相关来提高声呐的处理增益. 由于声呐信号受信道影响, 使接收信号与参考信号的相关损失严重. 为了补偿信道的影响, 必须作自适应修正匹配. 原理框图如图 3:

横向滤波器的权系数按式 (24) 的叠代方程求得, 即

$$W_N(n+1) = W_N(n) + 2\mu e(n)X(n)$$

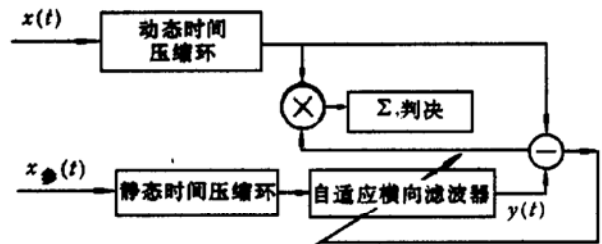


图 3 信道自适应修正匹配框图

式中误差能量  $e^2(n) = |y(n) - X(n)|^2$ . 从图 3 的原理框图及 (24) 式可以看出, 快速求得自适应滤波器的权系数是实现实时修正匹配的关键. 为此我们采用两个办法, 第一是 (23) 式中用瞬时值代替期望值, 减少了运算量和存储量. 第二是对叠代步长因子  $\mu$  作自适应调节, 推导如下:

求误差能量相对于  $\mu$  的极值

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^2(n+1)}{\partial \mu} &= 2e(n+1) \cdot \frac{\partial e(n+1)}{\partial \mu} \\ &= 2[X(n+1) - X_r(n) \cdot W^T(n+1)] \cdot [-X_r(n) \cdot \frac{\partial W^T(n+1)}{\partial \mu}] = 0 \\ X(n+1) - X_r(n) \cdot W^T(n+1) &= 0 \\ X(n+1) - X_r(n) \cdot W^T(n) - X_r(n) \cdot 2\mu e(n) \cdot X(n) &= 0 \\ X(n+1) - X_r(n) \cdot W^T(n) &= X_r(n) \cdot 2\mu e(n) \cdot X(n) \\ \mu &= \frac{X(n+1) - X_r(n) \cdot W^T(n)}{2e(n) \cdot X_r(n) \cdot X(n)} = \frac{e(n+1)}{2e(n) \cdot R_{xxr}} \end{aligned} \tag{27}$$

$$\mu_a = \frac{e(n+1)}{2e(n) \cdot R_{xx}}$$

从 (27) 式看出步长因子应根据误差的变化来调节, 这样才能达到提高权系数收敛速度的效果. 这一点将在下一节计算机模拟中得到证实.

## 四、计算机模拟

本文希望通过计算机模拟信道自适应修正匹配观察到: (1) 不同信噪比时, 固定叠代步长因子  $\mu$  与自适应调节叠代步长因子  $\mu_a$  的使用情况. (2) 在一定条件下使用固定叠代步长因子  $\mu$  与使用自适应调节叠代步长因子  $\mu_a$ , 对收敛速度的影响作定量比较. 下面分别论述不同信噪比信号的产生, 横向滤波器设计, 和程序流程及模拟结果.

### 1. 产生不同信噪比的数字信号

取白噪声发生器的信号经三分之一倍频程滤波器滤波后作为信号, 按不同信噪比的要求与白噪声信号相加, 然后经 12 位模数转换器转换成数字信号, 作为数据文件存入计算机.

### 2. 自适应横向滤波器的设计

本文假设有 9 个等间隔权系数的横向滤波器来模拟多途信道.

设信号的抽样频率为  $f_s$ , 抽样间隔  $T_s = 1/f_s$ . 选择权系数间隔为  $40T_s$ , 则滤波器的原理框图如图 2 所示, 图中  $\tau = 40T_s$ ;  $N = 10$ .

为运算简单而又不失普遍意义起见, 假设只有第四个权系数所表示的途幅度为 1, 其他各途幅度为零, 即

$$y(t) = A_1x(t) + A_2x(t - \tau) + A_3x(t - 2\tau) \cdots + A_9x(t - 8\tau)$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = A_9 = 0$$

$$A_4 = 1$$

$$y(t) = x(t - 3\tau)$$

### 3. 程序流程

### 4. 模拟结果分析

模拟结果示于图 5 到图 12. 从这些图中可以看出:

(1) 比较图 5(a) 和图 5(b) 可以看出, 无噪声时, 采用自适应叠代步长, 当叠代次数接近 300 次时, 误差能量驱于零. 而采用固定叠代步长时, 为了达到与自适应叠代步长差不多快的收敛速度  $\mu$  的取值为 0.01, 对固定叠代步长来讲这是一个比较大的值, 结果使误差能量函数产生振荡.

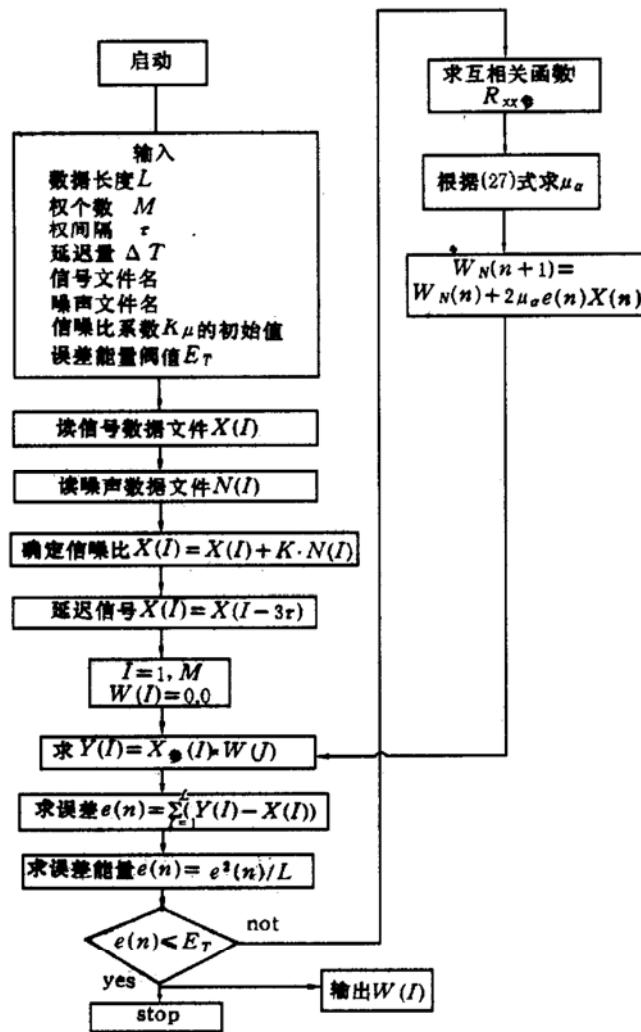


图 4 程序流程图

(2) 从图 7 到图 12 示出随着信噪比的下降, 收敛的误差能量上升. 固定叠代步长因子  $\mu$  的取值, 均以在同一信噪比下达到与自适应叠代步长同样的收敛速度为准. 可以看出使用自适应叠代步长因子时, 误差能量函数平稳收敛, 而固定叠代步长因子时, 误差能量函数产生振荡.

(3) 假设的信号延迟在第四个抽头上. 从求出的权系数来看, 一直到信噪比小到  $-26\text{dB}$  仍是第四个抽头上的权系数略大于其他抽头上的权系数 (图 12). 但如果用来作检测, 则信噪比为  $-20\text{dB}$  时比较可靠 (图 10).

(4) 图 13(a) 和图 13(b) 示出信噪比同为  $-6\text{dB}$  时, 同样在误差能量函数平稳收敛情况下, 采用自适应叠代步长  $\mu_\alpha$  与固定叠代步长  $\mu$  收敛速度的差别. 可以明显看出采用自适应叠代步长  $\mu_\alpha$  时收敛速度整整快了一倍.

(5) 从程序流程图上看每一次叠代求自适应调节的步长因子  $\mu_\alpha$ , 需要增加一些运算量, 主要是求互相关函数  $R_{xx}$ , 然后根据 (27) 或算出  $\mu_\alpha$ . 增加后的运算量约为固定  $\mu$  运算量的  $(1 + 1/M)$  倍,  $M$  为滤波器权的数目.

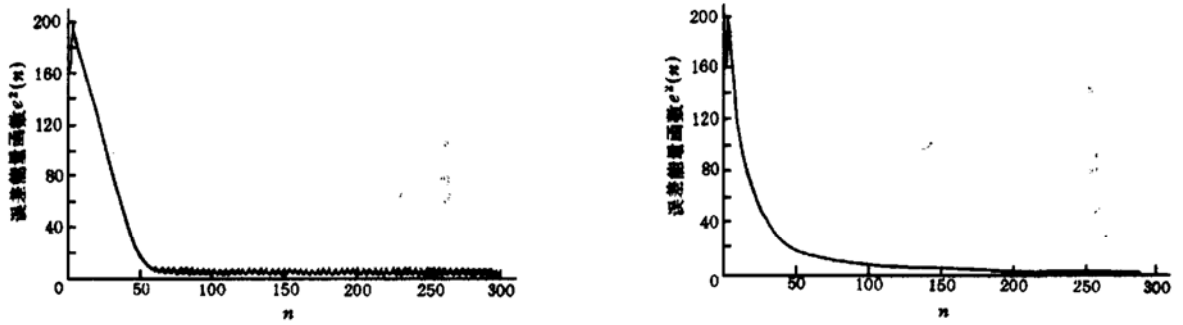


图 5 无噪声时误差能量函数  $e^2(n)$ ：  
(a) 固定叠代步长  $\mu=0.01$ ； (b) 自适应  $\mu_\alpha$

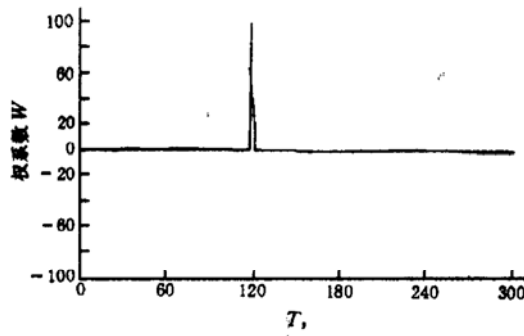


图 6 无噪声时经过 300 次叠代求出的权系数

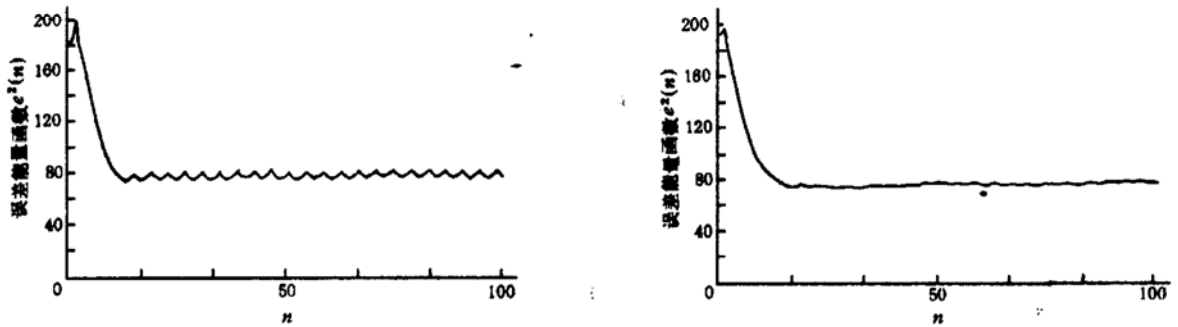


图 7 信噪比为  $-6\text{dB}$  时的误差能量函数  $e^2(n)$ ：  
(a) 固定叠代步长  $\mu=0.04$ ； (b) 自适应  $\mu_\alpha$

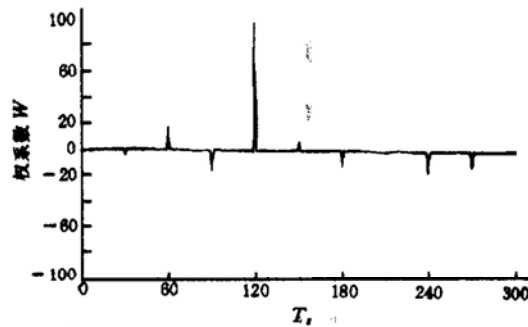


图 8 信噪比为  $-6\text{dB}$  时经过 100 次叠代求出的权系数



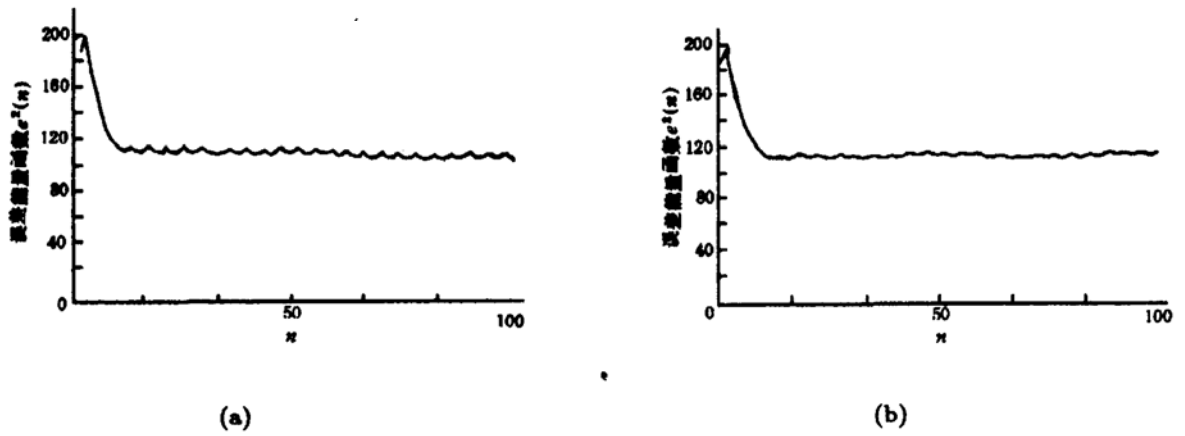


图 9 信噪比为 -20 分贝时的误差能量函数  $e^2(n)$   
 (a) 固定叠代步长  $\mu=0.04$ ; (b) 自适应  $\mu_\alpha$

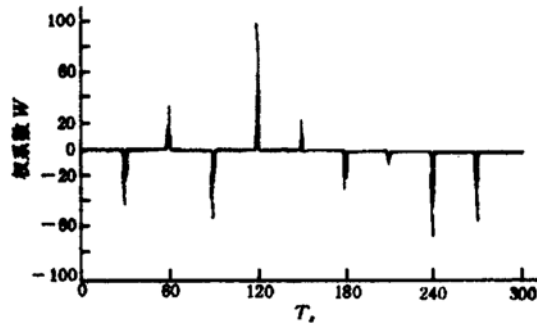


图 10 信噪比为 -20dB 时经过 100 次叠代求出的权系数

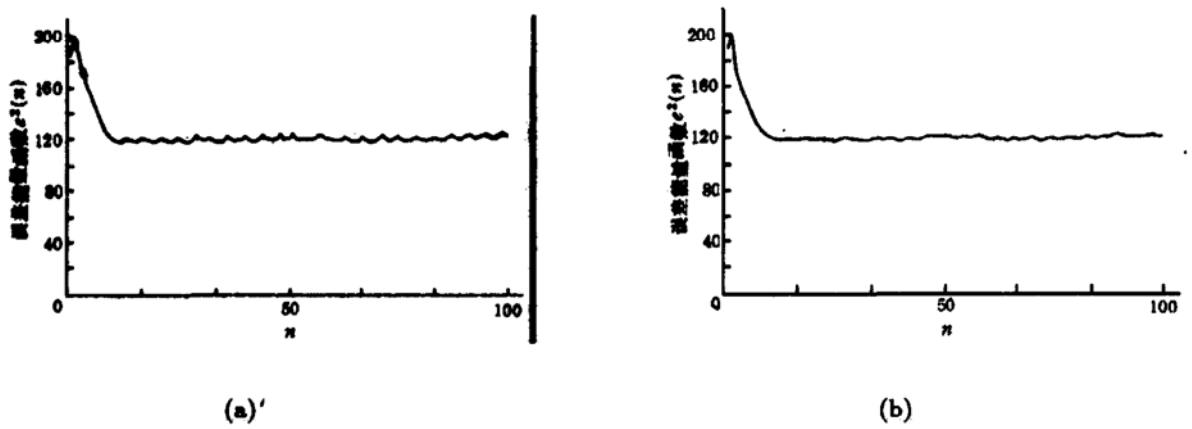
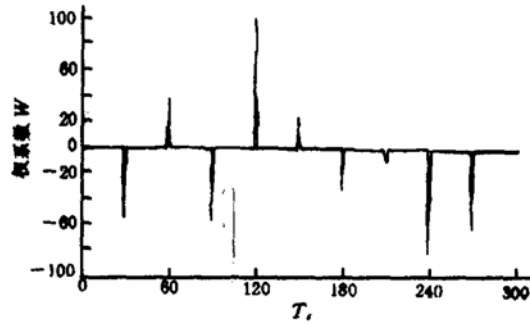
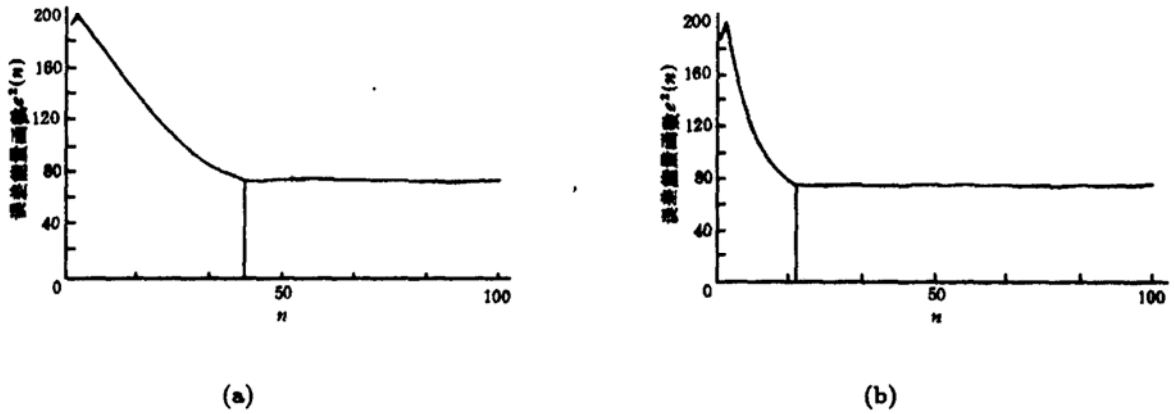


图 11 信噪比为 -28 分贝时的误差能量函数  $e^2(n)$ :  
 (a) 叠代步长  $\mu=0.04$ ; (b) 自适应  $\mu_\alpha$

图 12 信噪比为  $-26\text{dB}$  时, 经过 100 次叠代求出的权系数图 13 信噪比为  $-6$  分贝时, 变换叠代步长后的误差能量函数  $e^2(n)$ :  
(a) 叠代步长  $\mu=0.01$ ; (b) 自适应  $\mu_\alpha$ 

## 五、结 束 语

本文推导出的自适应叠代步长因子  $\mu$  经计算机模拟, 证实了确能提高自适应叠代方程的收敛速度 (大约一倍)。在采用横向滤波器模拟多途声传播信道时, 为了能有效地对信道进行修正匹配, 必须寻找快速求解信道响应函数的方法。用自适应滤波方法求解横向滤波器的权系数时, 如果叠代方程收敛的快, 求出的权系数就可以用来对信道进行实时修正。从文献 [3] 中已知, 时变的声传播信道包含有三个部分, 即快速变化的随机部分, 有规则的慢变部分和稳定部分。利用快速收敛的自适应叠代算法求出的信道响应权系数, 可以对信道的后两部分进行实时修正匹配。

## 参 考 文 献

- [1] 徐俊华, 陈庚, “时变信道相干部分的修正匹配”, 声学学报 7 (1982), No.6, 352 - 363.
- [2] B. Widrow and S. D. Stearns, Adaptive Signal Processing, Prentice, Englewood cliffs, N.J. 1985.
- [3] 陈庚、徐俊华, “用脉间相关法测量海洋声信道的时变特性”, 声学学报 7 (1981), No.3, 152 - 161.