

# 水声换能器电声特性的一种分析方法

李东林 蒋楠祥

(哈尔滨船舶工程学院水声研究所, 哈尔滨 150001)

1991年11月16日收到

**摘要** 本文给出一种有限元——亥姆霍茨积分方程结合法, 计算有限长圆柱形水声换能器的电声特性。通过对一例换能器空气中及水中的电声特性的计算并与实测值比较, 证明这种方法是很有效的。

## An analytical method for electro-acoustic performances of underwater acoustic transducer

LI Donglin and JIANG Nanxiang

(Harbin Shipbuilding Engineering Institute)

Received November 16, 1991

**Abstract** A finite element-Helmholtz integral hybrid method has been developed to calculate the electro-acoustic performances of a finite length cylindrical transducer immersed in water. A numerical study concerned with electrical impedance and beam patterns of the transducer is presented. Experimental data are shown to support the numerical study.

## 一、引 言

本文给出一种有限元——亥姆霍茨积分方程结合法, 用以计算有限长圆柱形水声换能器的电声特性。这种方法可避免 W. Williams 提出的“最小平方误差法”中利用球函数逼近声场的弱点<sup>[1]</sup>, 而且也不需要像纯粹的有限元法那样, 在计算声场时必须把无限的声介质空间看成是有边界的有限区域, 再把此有限区域划分成若干有限单元而计算之。此外, 这种方法还显示出简便易行的特点, 这在工程计算上是很有利的。为计及压电陶瓷的多项损耗, 在计算中还采用了由实测所得的复参数。

## 二、理 论 部 分

### 1. 压电圆管振动方程的建立

有限长圆柱形换能器的工作元件为一圆柱形压电陶瓷管。由于轴对称, 应用有限元法时,

可将圆管分成若干个具有矩形截面的环形元, 取其中的一个单元, 如图 1 所示。

设元内任一点的位移为

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z + \alpha_4 r z$$

$$w = \alpha_5 + \alpha_6 r + \alpha_7 z + \alpha_8 r z$$

即

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [A] \{\alpha\} \quad (1)$$

则当截面上四个节点的坐标分别为, 节点 1( $r_1, z_1$ ); 节点 2( $r_2, z_1$ ); 节点 3( $r_1, z_3$ ); 节点 4( $r_2, z_3$ ) 时(见图 1), 节点处的位移便为

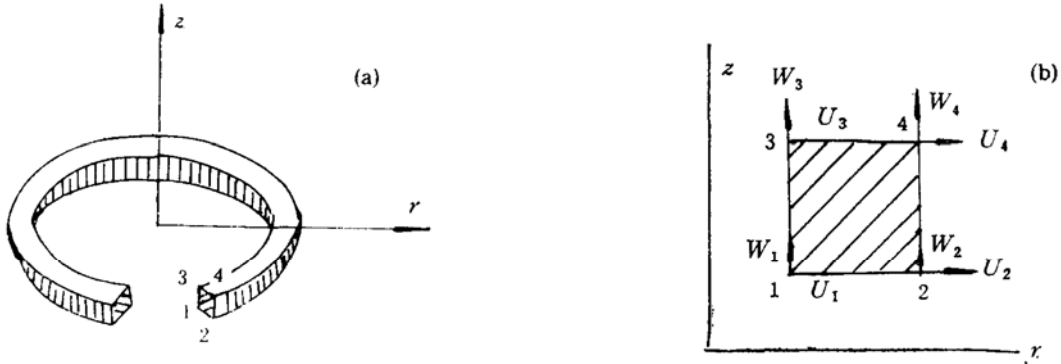


图 1 单元及其矩形截面

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 & r_1 z_1 & & & & \\ 1 & r_2 & z_1 & r_2 z_1 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ 1 & r_1 & z_3 & r_1 z_3 & & & & \\ 1 & r_2 & z_3 & r_2 z_3 & & & & \\ \hline & & & & & 1 & r_1 & z_1 & r_1 z_1 \\ & & & & & 1 & r_2 & z_1 & r_2 z_1 \\ & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & r_1 & z_3 & r_1 z_3 \\ & & & & & 1 & r_2 & z_3 & r_2 z_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

即

$$\{q\} = [B] \{\alpha\} \quad (3)$$

或

$$\{\alpha\} = [B]^{-1} \{q\} \quad (4)$$

于是有

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [A][B]^{-1} \{q\} = [C_q] \{q\} \quad (5)$$

其中  $[C_q]$  即为形状函数。它的具体形式为

$$[C_q] = \frac{1}{(r_2 - r_1)(z_3 - z_1)} \begin{bmatrix} (r_2 - r)(z_3 - z) & (r - r_1)(z_3 - z) & (r_2 - r)(z - z_1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (r-r_1)(z-z_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (r_2-r)(z_3-z) & (r-r_1)(z_3-z) & (r_2-r)(z-z_1) & (r-r_1)(z-z_1) \end{bmatrix} \quad (6)$$

单元上任一点的应变分量为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} S_\theta \\ S_z \\ S_r \\ S_{zr} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial r & 0 \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial r & 0 \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & r & z & rz & & & & 0 \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & 0 & & & & 1 & r & z & rz \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/r & 1 & z/r & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r & 0 & 1 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (7) \end{aligned}$$

即

$$\{S\} = [D_\alpha]\{\alpha\} = [D_\alpha][B]^{-1}\{q\} = [D]\{q\} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} [D] &= \frac{1}{(r_2-r_1)(z_3-z_1)} \\ &\begin{bmatrix} (r_2-r)(z_3-z)/r & (r-r_1)(z_3-z)/r & (r_2-r)(z-z_1)/r & (r-r_1)(z-z_1)/r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(z_3-z) & z_3-z & -(z-z_1) & z-z_1 \\ -(r_2-r) & -(r-r_1) & r_2-r & r-r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(r_2-r) & -(r-r_1) & r_2-r & r-r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(z_3-z) & z_3-z & -(z-z_1) & z-z_1 \end{bmatrix} \quad (9) \end{aligned}$$

对于径向极化的压电陶瓷圆管, 它的压电方程为

$$\begin{Bmatrix} T_\theta \\ T_z \\ T_r \\ T_{zr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 \\ C_{12}^E & C_{11}^E & C_{13}^E & 0 \\ C_{13}^E & C_{13}^E & C_{33}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_\theta \\ S_z \\ S_r \\ S_{zr} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{31} \\ e_{33} \\ 0 \end{Bmatrix} E_r \quad (10)$$

$$D_r = [e_{31} \quad e_{31} \quad e_{33} \quad 0] \begin{Bmatrix} S_\theta \\ S_z \\ S_r \\ S_{zr} \end{Bmatrix} + e_{33}^s E_r \quad (11)$$

即

$$\{T\} = [C^E][D]\{q\} - \{e\}^T E_r \quad (12)$$

$$D_r = \{e\}[D]\{q\} + e_{33}^s E_r \quad (13)$$

由此可求得刚度矩阵为

$$[K] = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_3} [D]^T [C^E] [D] r dr dz$$

$$= 2\pi \begin{bmatrix} C_{11}^E h_5 & (C_{11}^E + C_{13}^E) h_4 & C_{11}^E h_3 & (C_{11}^E + C_{13}^E) h_7 \\ (C_{11}^E + 2C_{13}^E + C_{33}^E) h_1 & (C_{11}^E + C_{13}^E) h_7 & (C_{11}^E + C_{13}^E) h_7 & (C_{11}^E + 2C_{13}^E + C_{33}^E) h_{11} \\ (C_{11}^E h_{10} + C_{44}^E h_1) & (C_{11}^E + C_{13}^E) h_9 + C_{44}^E h_2 & (C_{11}^E + C_{13}^E) h_9 + C_{44}^E h_2 & (C_{11}^E + 2C_{13}^E + C_{33}^E) h_{12} + C_{44}^E h_3 \end{bmatrix}$$

对称

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{11}^E h_4 & C_{11}^E h_1 \\ 0 & 0 & (C_{13}^E + C_{33}^E) h_1 & (C_{13}^E + C_{33}^E) h_2 \\ 0 & C_{44}^E h_1 & C_{11}^E h_7 & (C_{13}^E + C_{44}^E) h_{11} \\ 0 & C_{44}^E h_2 & (C_{13}^E + C_{33}^E) h_{11} & (C_{13}^E + C_{33}^E + C_{44}^E) h_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{44}^E h_1 & 0 & C_{44}^E h_{11} & \\ & C_{11}^E h_1 & C_{11}^E h_2 & \\ & & C_{11}^E h_3 + C_{44}^E h_{12} & \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中

$$h_1 = \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) (z_3 - z_1)$$

$$h_7 = \frac{1}{2} (r_2 - r_1) (z_3^2 - z_1^2)$$

$$h_2 = \frac{1}{3} (r_2^3 - r_1^3) (z_3 - z_1)$$

$$h_8 = \frac{1}{2} (z_3^2 - z_1^2) \ln(r_2/r_1)$$

$$h_3 = \frac{1}{4} (r_2^4 - r_1^4)(z_3 - z_1)$$

$$h_9 = \frac{1}{3} (r_2 - r_1)(z_3^3 - z_1^3)$$

$$h_4 = (r_2 - r_1)(z_3 - z_1)$$

$$h_{10} = \frac{1}{3} (z_3^3 - z_1^3) \ln(r_2/r_1)$$

$$h_5 = (z_3 - z_1) \ln(r_2/r_1)$$

$$h_{11} = \frac{1}{4} (r_2^2 - r_1^2)(z_3^2 - z_1^2)$$

$$h_6 = \frac{1}{6} (r_2^3 - r_1^3)(z_3^2 - z_1^2)$$

$$h_{12} = \frac{1}{6} (r_2^2 - r_1^2)(z_3^3 - z_1^3)$$

质量矩阵为

$$[M] = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_3} \rho [C_q]^T [C_q] r dr dz$$

$$= \frac{\pi \rho (r_2 - r_1)(z_3 - z_1)}{36} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} 2(r_2 + 3r_1) & 2(r_1 + r_2) & 3r_1 + r_2 & r_1 + r_2 \\ & 2(r_1 + 3r_2) & r_1 + r_2 & r_1 + 3r_2 \\ & & 2(3r_1 + r_2) & 2(r_1 + r_2) \\ & & & 2(r_1 + 3r_2) \end{array} \right] \\ \text{对称} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ \hline \left[ \begin{array}{cccc} 2(r_2 + 3r_1) & 2(r_1 + r_2) & 3r_1 + r_2 & r_1 + r_2 \\ & 2(r_1 + 3r_2) & r_1 + r_2 & r_1 + 3r_2 \\ & & 2(3r_1 + r_2) & 2(r_1 + r_2) \\ & & & 2(r_1 + 3r_2) \end{array} \right] \\ \text{对称} \end{array}$$

(15)

压电矩阵为

$$[\mathbf{G}] = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_3} [D]^T r dr dz = 2\pi \times \begin{bmatrix} (r_2 - r_1)(z_3 - z_1)/4 & 0 & -(r_1 + r_2)(z_3 - z_1)/4 & -r_2(r_1 + r_2)/2 + (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3 \\ (r_2 - r_1)(z_3 - z_1)/4 & 0 & (r_1 + r_2)(z_3 - z_1)/4 & r_1(r_1 + r_2)/2 - (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3 \\ (r_2 - r_1)(z_3 - z_1)/4 & 0 & -(r_1 + r_2)(z_3 - z_1)/4 & r_2(r_1 + r_2)/2 - (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3 \\ (r_2 - r_1)(z_3 - z_1)/4 & 0 & (r_1 + r_2)(z_3 - z_1)/4 & -r_1(r_1 + r_2)/2 + (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3 \\ 0 & -r_2(r_1 + r_2)/2 + (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3 & 0 & -(r_1 + r_2)(z_3 - z_1)/4 \\ 0 & r_1(r_1 + r_2)/2 - (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3 & 0 & (r_1 + r_2)(z_3 - z_1)/4 \\ 0 & r_2(r_1 + r_2)/2 - (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3 & 0 & -(r_1 + r_2)(z_3 - z_1)/4 \\ 0 & -r_1(r_1 + r_2)/2 + (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3 & 0 & (r_1 + r_2)(z_3 - z_1)/4 \end{bmatrix} \quad (16)$$

空气中的振动可认为是无外载荷的。对于一个单元,在无外载荷的情况下,节点上的弹性力、惯性力与压电力的平衡方程为

$$([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])\{q\} = [\mathbf{G}]\{e\}^T E, \quad (17)$$

对于整个压电陶瓷圆管,则有

$$([\bar{\mathbf{K}}] - \omega^2[\bar{\mathbf{M}}])\{q\} = [\bar{\mathbf{G}}]\{e\}^T E, \quad (18)$$

## 2. 换能器水中振动方程的建立

有限长圆柱形换能器放入水中辐射声波时,它的整个外表面均将受到声压的作用。现将换能器分成  $N + M + L = S$  个环形元,如图 2 所示。坐标原点取在系统的对称中心点。设第  $m$  个单元上任一点的法向位移、法向振速及声压分别为

$$u^m = [C_q^m]\{q^m\} \quad (19)$$

$$\dot{u}^m = j\omega[C_q^m]\{q^m\} \quad (20)$$

$$p^m = [C_p^m]\{p^m\} \quad (21)$$

式中

$$\{q^m\} = \begin{Bmatrix} u^m \\ u_{m+1} \end{Bmatrix}$$

$$\{p^m\} = \begin{Bmatrix} p^m \\ p_{m+1} \end{Bmatrix}$$

而  $p_m, u_m$  分别为第  $m$  条节线处的声压及法向位移值;  $[C_p^m]$ 、 $[C_q^m]$  分别是声压及法向位移的形状函数。

利用亥姆霍茨积分方程可将具有光滑表面的声辐射体的表面声压  $p_s$  与表面法向位移  $u_s$  的关系表成

$$2\pi p_s(x_0, y_0, z_0) = \iint_{(S)} p_s(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) dS - \rho_k \omega^2 \iint_{(S)} \frac{e^{-ikR}}{R} u_s(x, y, z) dS \quad (22)$$

式中  $p_s(x_0, y_0, z_0)$  是辐射体表面任一点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的声压;  $(S)$  是整个辐射体的光滑闭合外表面;  $R = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}$ 。但在目前的情况下,换能器外表面并非全部是光滑曲面。在上下盖板的边缘,外表面没有唯一的面法向矢量。因此我们引用文献[2]给

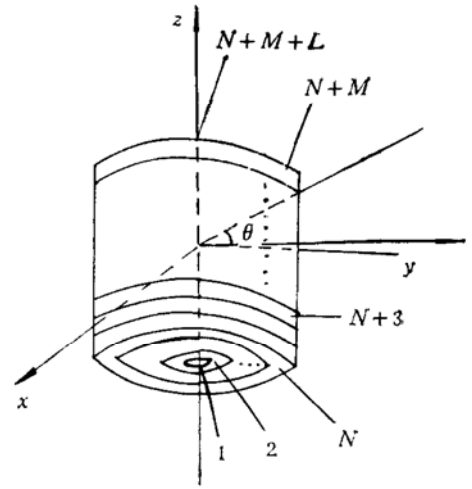


图 2 换能器单元的划分

出的在具有棱角的闭合曲面上亥姆霍茨积分方程的应用公式

$$\begin{aligned} & \left[ 4\pi + \iint_{(S)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) dS \right] p_s(x_0, y_0, z_0) \\ & = \iint_{(S)} p_s(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) dS - \rho_w \omega^2 \iint_{(S)} \frac{e^{-ikR}}{R} u_s(x, y, z) dS \end{aligned} \quad (23)$$

在应用有限元法时,则有

$$\begin{aligned} & \left[ 4\pi + \sum_m \iint_{(S^m)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_j^m} \right) dS^m \right] p_i \\ & = \sum_m \iint_{(S^m)} \left( \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikR_j^m}}{R_j^m} \right) p^m dS^m - \rho_w \omega^2 \sum_m \iint_{(S^m)} \frac{e^{-ikR_j^m}}{R_j^m} u^m dS^m \end{aligned} \quad (24)$$

式中  $p_i$ : 第  $i$  条节线上的声压;

$p^m$ : 第  $m$  个单元上任一点的声压;

$u^m$ : 第  $m$  个单元上任一点的法向位移;

$S^m$ : 第  $m$  个单元的面积;

$R_j^m$ : 第  $j$  条节线上某点至第  $m$  个单元上任一点的距离。

将(19)–(21)式代入上式可得

$$\begin{aligned} & \left[ 4\pi + \sum_m \iint_{(S^m)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_j^m} \right) dS^m \right] p_i = \sum_m \left( \iint_{(S^m)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR_j^m}}{R_j^m} \right) [C_p^m] dS^m \right) \{p^m\} \\ & - \rho_w \omega^2 \sum_m \left( \iint_{(S^m)} \frac{e^{-ikR_j^m}}{R_j^m} [C_q^m] dS^m \right) \{q^m\} \end{aligned}$$

令

$$C_j^m = \iint_{(S^m)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_j^m} \right) dS^m$$

$$[a_j^m] = \iint_{(S^m)} \left( \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikR_j^m}}{R_j^m} \right) [C_p^m] dS^m$$

$$[b_j^m] = \iint_{(S^m)} \frac{e^{-ikR_j^m}}{R_j^m} [C_q^m] dS^m$$

于是有

$$\left[ 4\pi + \sum_m C_j^m \right] p_i = \sum_m [a_j^m] \{p^m\} - \rho_w \omega^2 \sum_m [b_j^m] \{q^m\} \quad (25)$$

对于所有节线则有

$$\left[ 4\pi + \sum_m C^m \right] \{p_\Sigma\} = [a] \{p_\Sigma\} + [b] \{q_\Sigma\}$$

即

$$\left( \left[ 4\pi + \sum_m C^m \right] - [a] \right) \{p_s\} = [b] \{q_s\}$$

或

$$\begin{aligned} [d] \{p_s\} &= [b] \{q_s\} \\ \{p_s\} &= [d]^{-1} [b] \{q_s\} = [g] \{q_s\} \end{aligned} \quad (26)$$

如前所述,下盖板、压电圆管、上盖板分别被分割成  $N$ 、 $M$ 、 $L$  个单元,若将(26)式分成三部分写出,则为

$$\begin{bmatrix} \{p_s^n\} \\ \{p_s^m\} \\ \{p_s^l\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [g_{nn}] & [g_{nm}] & [g_{nl}] \\ [g_{mn}] & [g_{mm}] & [g_{ml}] \\ [g_{ln}] & [g_{lm}] & [g_{ll}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_s^n\} \\ \{q_s^m\} \\ \{q_s^l\} \end{bmatrix} \quad (27)$$

现在再将作用于圆管外表面上的声压作为外载荷移置到节点上去。对于第  $m$  个单元,根据虚功原理有

$$\{\delta q^m\}^T \{f^m\} = - \iint_{(S^m)} (\delta u^m) p^m dS^m$$

即

$$\{\delta q^m\}^T \{f^m\} = - \{\delta q^m\}^T \left( \iint_{(S^m)} [C_q^m]^T [C_p^m] dS^m \right) \{p^m\}$$

于是在第  $m$  个元的节线上被移置的外载荷为

$$\{f^m\} = - \left( \iint_{(S^m)} [C_q^m]^T [C_p^m] dS^m \right) \{p^m\} = [I^m] \{p^m\} \quad (28)$$

对于所有节线,则有

$$\{f_s\} = [I] \{p_s\} = [I] [g] \{q_s\} = [J] \{q_s\} \quad (29)$$

对于整个换能器,则成

$$\{f\} = [J] \{q\} \quad (30)$$

于是,在有水介质作为声负载的情况下,换能器的振动方程将为

$$\left( [\bar{K}] - \omega^2 [\bar{M}] - \begin{bmatrix} \bar{J} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \bar{q}^s \\ \bar{q}^r \end{Bmatrix} = [\bar{C}] \{e\}^T E_r \quad (31)$$

此处上标  $s$  表示与水介质接触部分的节线,上标  $r$  表示不与水介质接触部分的节线。

### 3. 电导纳及辐射指向性的计算

在压电陶瓷圆管上,对于第  $m$  个单元而言,它的电极面上的电荷为

$$Q^m = \iint_{(S^m)} D_r dS^m \quad (32)$$

如果这第  $m$  单元截面上的坐标如图 1 中所示,则我们有

$$Q^m = 2\pi r_2 \int_{z_1}^{z_3} D_r dz = 2\pi r_2 \{e\} \left( \int_{z_1}^{z_3} [D^m] dz \right) \{q^m\} + 2\pi r_2 \epsilon_{33}^s E_r \int_{z_1}^{z_3} dz$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi r_2}{r_2 - r_1} \left[ -(z_3 - z_1)e_{33}u_1 + \frac{(r_2 - r_1)(z_3 - z_1)}{r_2} e_{31}u_2 + (z_3 - z_1)e_{33}u_2 \right. \\
&\quad - (z_3 - z_1)e_{33}u_3 + \frac{(r_2 - r_1)(z_3 - z_1)}{r_2} e_{31}u_4 + (z_3 - z_1)e_{33}u_4 \\
&\quad \left. - 2(r_2 - r_1)e_{31}w_2 + 2(r_2 - r_1)e_{31}w_4 \right] + 2\pi r_2(z_3 - z_1)e_{33}^s E_r \quad (33)
\end{aligned}$$

对于整个压电陶瓷管,电极面上的总电荷为

$$Q_\Sigma = \sum_m Q^m$$

于是输入电导纳为

$$Y_\Sigma = j\omega Q_\Sigma / V \quad (34)$$

根据亥姆霍茨公式,在  $xz$  坐标平面上任一点  $(\rho, \theta)$  处的声压  $p(\rho, \theta)$  为(见图 3)

$$\begin{aligned}
&\left[ 4\pi + \iint_{(S)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) dS \right] p(\rho, \theta) \\
&= \iint_{(S)} p_s \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) dS - \rho_k \omega^2 \iint_{(S)} \frac{e^{-ikR}}{R} u_s dS
\end{aligned}$$

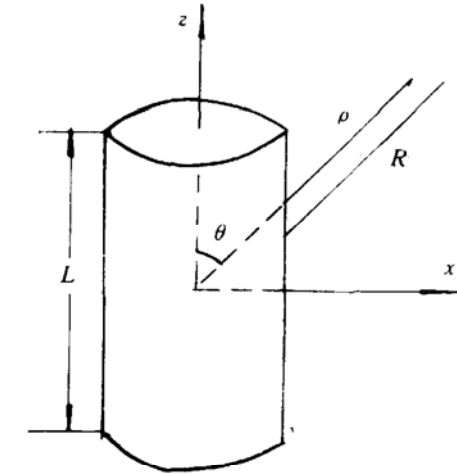


图 3  $xz$  平面上任一点  $(\rho, \theta)$  处的声压 在有限元法中可写成

$$\begin{aligned}
\left[ 4\pi + \sum_m \iint_{(S^m)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R^m} \right) dS^m \right] p(\rho, \theta) &= \sum_m \iint_{(S^m)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR^m}}{R^m} \right) [C_p^m] dS^m \{p^m\} \\
&\quad - \rho_k \omega^2 \sum_m \iint_{(S^m)} \frac{e^{-ikR^m}}{R^m} [C_q^m] dS^m \{q^m\}
\end{aligned}$$

此处,由于

$$\sum_m \iint_{(S^m)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R^m} \right) dS^m$$

项与  $4\pi$  相比很小,故可略去,而有

$$\begin{aligned}
p(\rho, \theta) &= \frac{1}{4\pi} \left[ \sum_m \iint_{(S^m)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR^m}}{R^m} \right) [C_p^m] dS^m \{p^m\} \right. \\
&\quad \left. - \rho_k \omega^2 \sum_m \iint_{(S^m)} \frac{e^{-ikR^m}}{R^m} [C_q^m] dS^m \{q^m\} \right] \quad (35)
\end{aligned}$$

在  $xz$  坐标平面上,以  $x$  轴为参考方向的指向性函数为

$$D(\theta) = |p(\rho, \theta)| / \left| p\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) \right| \quad (36)$$

#### 4. 对薄壁短圆管的简化

若压电陶瓷圆管的厚度、高度与半径的比值满足薄壁短圆管的条件,则上述诸式将得到相应程度的简化。

(1) 薄壁,可认为沿  $r$  方向无应力波,故位移、应力、应变等均与  $r$  无关。无外载荷时,

$T_r = 0$ .

(2) 短圆管, 即纵向谐振频率远高于径向谐振频率。当圆管工作于径向谐振频率附近时纵向振动效应很小, 可略。

基于以上两点假设, 如果压电陶瓷圆管又是被等分为  $M$  个元的, 则对于任一单元  $m$  而言, 它将具有与其它单元完全相同的刚度矩阵、质量矩阵及压电矩阵的表达式, 即

$$[K^m] = [K] = \frac{\pi l}{3MS_{11}^E a} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{2M\pi a t}{S_{44}^E l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$[M^m] = [M] = \frac{\rho \pi a t l}{3M} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$[G^m] = [G] = \pi t \begin{bmatrix} l/M & -2a \\ l/M & 2a \end{bmatrix} \quad (39)$$

其中  $t$  为圆管的壁厚,  $a$  为圆管的平均半径,  $l$  为圆管的高度, 而  $l/M$  则相应于

$$z_{M+1} - z_M = z_M - z_{M-1} = \dots = z_2 - z_1 = l/M.$$

圆管无外载荷时的振动方程仍具有第 1 节中(18)式的形式, 但在内容上已得到了相应的简化。

与此同时, 第  $m$  个单元上的面电荷表达式亦简化为

$$Q^m = \frac{\pi l}{M} \left[ \frac{d_{31}}{S_{11}^E} (u_{m+1} + u_m) + 2a\epsilon_{33}^s E_r \right] \quad (40)$$

对于整个压电陶瓷圆管而言, 其输入电导纳的表达式仍为第 3 节中的(34)式的形式。

辐射指向性公式也相应地得到了简化。如果用  $p_1(\rho, \theta)$ 、 $p_2(\rho, \theta)$ 、 $p_3(\rho, \theta)$  分别表示上盖板、下盖板及压电陶瓷柱面对空间任一点  $P(\rho, \theta)$  处声压的贡献, 则(参见图 3)

上盖板的贡献为

$$p_1(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_l \int_0^{2\pi} \int_{r_{l+1}}^{r_l} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR^l}}{R^l} \right) [C^l] r dr d\alpha \{P^l\} \quad (41)$$

其中

$$R^l = \rho - \frac{L}{2} \cos \theta - r \cos \alpha \sin \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial R^l} \frac{\partial R^l}{\partial n} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial R^l}$$

$$[C^l] = \frac{1}{r_l - r_{l+1}} [r_l - r \quad -r_{l+1} + r]$$

下盖板的贡献为

$$p_2(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_0^{2\pi} \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR^n}}{R^n} \right) [C^n] r dr d\alpha \{P^n\} \quad (42)$$

其中

$$R^n = \rho + \frac{L}{2} \cos \theta - r \cos \alpha \sin \theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial R^n},$$

$$[C^n] = \frac{1}{r_{n+1} - r_n} [r_{n+1} - r - r_n + r].$$

压电陶瓷柱面的贡献为

$$p_3(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi} \left[ \sum_m \int_0^{2\pi} \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR^m}}{R^m} \right) [C^m] ad\alpha dz \{P^m\} - \rho_w \omega^2 \sum_m \int_0^{2\pi} \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{e^{-ikR^m}}{R^m} [C^m] ad\alpha dz \{q^m\} \right] \quad (43)$$

其中

$$R^m = \rho - z \cos \theta - a \cos \alpha \sin \theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sin \theta \cos \alpha \frac{\partial}{\partial R^m},$$

$$[C^m] = \frac{1}{z_{m+1} - z_m} [z_{m+1} - z - z_m + z].$$

空间任一点  $P(\rho, \theta)$  处的声压可表成

$$p(\rho, \theta) = p_1(\rho, \theta) + p_2(\rho, \theta) + p_3(\rho, \theta)$$

在  $x - z$  坐标平面上,以  $x$  轴为参考方向的指向性函数仍具有 2.3 中(36)式的形式。

### 三、测量结果

利用此法,作者对图 4 所示的有限长圆柱形换能器进行了计算。该换能器由一压电陶瓷

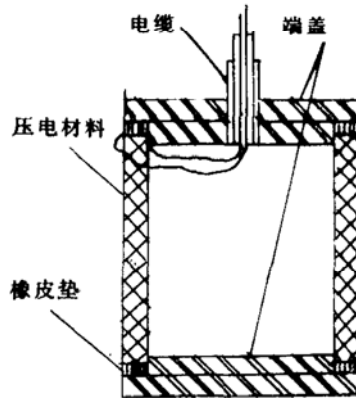


图 4 换能器结构

表 1 压电陶瓷 (PZT-4) 圆管的各项复参数值

物理参数	符号	实部	虚部	单位
复弹性系数	$S_{11}^E = S_{11}^{E'} - jS_{11}^{E''}$	$1.177 \times 10^{-11}$	$1.318 \times 10^{-14}$	$m^2/N$
复介电系数	$\epsilon_{33}^S = \epsilon_{33}^{S'} - j\epsilon_{33}^{S''}$	$7.414 \times 10^{-9}$	$1.765 \times 10^{-11}$	F/M
	$\epsilon_{33}^T = \epsilon_{33}^{T'} - j\epsilon_{33}^{T''}$	$9.653 \times 10^{-9}$	$1.135 \times 10^{-11}$	F/m
复压电系数	$d_{31} = d_{31}' - jd_{31}''$	$-1.066 \times 10^{-10}$	$2.881 \times 10^{-13}$	C/N

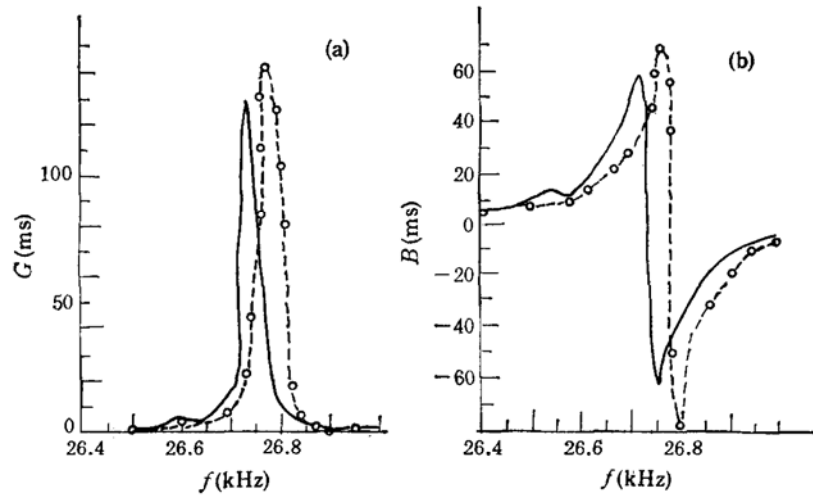


图 5 换能器在空气中的电导( $G$ )及电纳( $B$ )

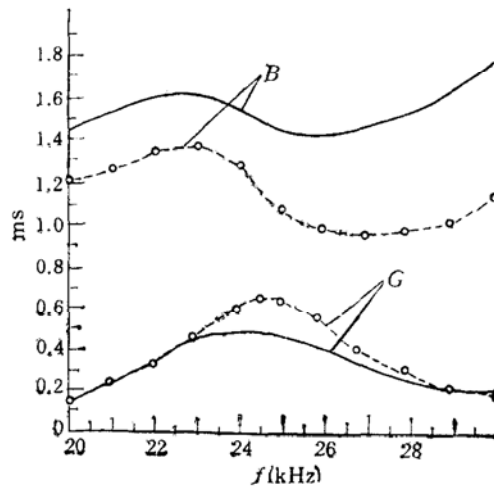


图 6 换能器在水中的电导( $G$ )及电纳( $B$ )  
—○—理论值 —实测值

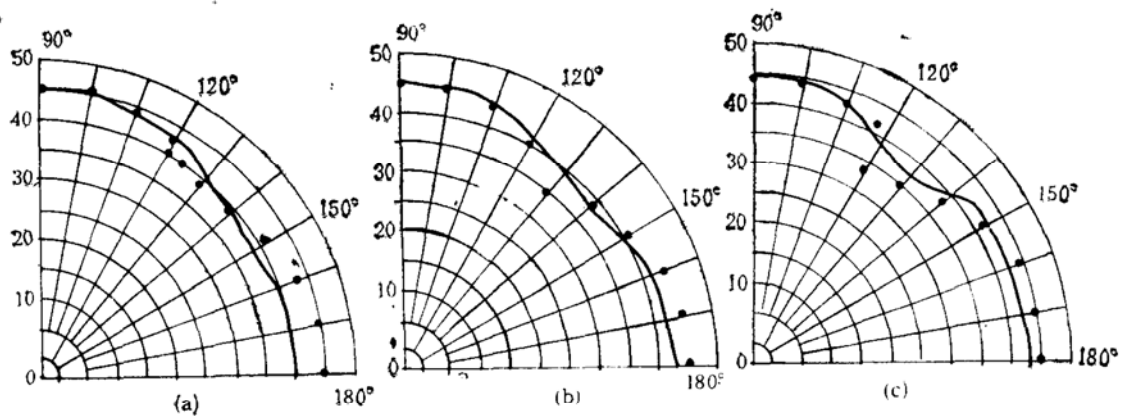


图 7 换能器的辐射指向性。(a)  $f = 20\text{kHz}$ , (b)  $f = 25\text{kHz}$ , (c)  $f = 30\text{kHz}$   
●——理论值 ————实测值。

圆管及上下盖板组成。压电陶瓷为 PZT-4, 其几何参数为: 内径  $a_i=0.038\text{m}$ , 外径  $a_o=0.042\text{m}$ , 壁厚  $t=0.003\text{m}$ , 高度  $L=0.024\text{m}$ , 其质量密度为  $\rho=7.5 \times 10^3\text{kg/m}^3$ 。为计及压电陶瓷圆管本身的机械损耗、机电转换损耗及介电损耗, 计算中采用了经实测所得的各种复参数值。这些复值的测量方法可参阅文献[3], 其结果见表 1。

换能器电导纳及辐射指向性的计算结果与实测结果的比较可见图 5—7。

## 四、结 论

有限元——亥姆霍茨积分方程结合法是一种有效的分析水声换能器电声特性的方法。值得指出的是, 它不仅适用于计算声辐射问题, 而且也适用于计算声散射问题, 这只需将所给出的换能器振动方程右端的电激励项改成为入射波激励即可。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] W. Williams, "Acoustic Radiation from a finite C y linder", *J. Acoust. Soc. Am.* 36(1964).
- [ 2 ] A. F. Seybert, "An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in three dimensions", *J. Acoust. Soc. Am.* 77(1985).
- [ 3 ] 蒋楠祥、李东林, "考虑损耗时压电陶瓷复参数的获得", 哈尔滨船舶工程学院学报, 10(1989).