

# 粗糙界面的波导散射和非波导 散射之间的关系

高 天 赋

(中国科学院声学研究所)

1987年1月27日收到

**摘要** 本文给出在小瑞利参数情况下波导中由粗糙界面所产生的散射波强度  $I_R = \sum_{l,j} I_{l,j}^i$ , ( $l, j = 1, 2, 3, \dots$ ), 其中  $I_{l,j}^i$  正比于  $1/4$  倍第  $l$  (或  $j$ ) 号简正波在粗糙交界面上的强度以及散射系数  $m_{l,j}^i$ .  $m_{l,j}^i$  与平面波散射系数  $m_i$  存在下列关系:  $m_{l,j}^i = (2\pi)^2 m_i / |V(\theta_l)V(\theta_j)|$ , 其中  $V(\theta_l)$  和  $V(\theta_j)$  分别代表入射角等于  $\theta_l$  和  $\theta_j$  的平面波反射系数

## RELATION BETWEEN WAVEGUIDE AND NON-WAVEGUIDE SCATTERING FROM A ROUGH INTERFACE

GAO TIANFU

(Institute of Acoustics, Academia Sinica)

Received January 27, 1987

**Abstract** The scattering problem of a rough interface in a waveguide under small Rayleigh's parameter approximation is discussed in this paper. The derived scattering intensity can be written in the form  $I_R = \sum_{l,j} I_{l,j}^i$  ( $l, j = 1, 2, \dots$ ). Where  $I_{l,j}^i$  is proportional to  $m_{l,j}^i$  which is defined as the normal mode scattering coefficient for the rough interface. A relation has been found between  $m_{l,j}^i$  and the plane wave scattering coefficient  $m_i$ :  $m_{l,j}^i = (2\pi)^2 m_i / |V(\theta_l)V(\theta_j)|$  in which  $V(\theta_l)$  and  $V(\theta_j)$  represent the reflection coefficients respectively for incident angles  $\theta_l$  and  $\theta_j$ .

## 引 言

粗糙界面波散射是声学 and 雷达学所共同关心的问题, 已有专著<sup>[1,2]</sup>. 波导中粗糙界面的波散射同样也是人们感兴趣的问题, 水声学中的海底和海面混响就属于此类课题. 对于海洋界面混响的研究, 尤其是深海, 也已有很多有意义的工作<sup>[3,4]</sup>. 但是大洋深度深达五千米, 海洋的波导效应没有显著影响. 浅海则不然, 声波从源到散射点又返回声源, 有许多多途, 波导效应将起明显作用. 包含有许多多途的波导散射与无多途的非波导散射之间的关系是一个有意义的研究课题.

在第一节中,我们讨论对波导和非波导情况同时适用的散射场形式解,“次源”条件利用了 BACC 微扰结果. 第二节讨论非波导情况,把这种情况下的格林函数代入形式解得到散射场和平面波散射系数. 第三节讨论波导情况,除了在粗糙交界面之上的上介质中另加一平整边界以构成波导外,介质模型的其余部分和非波导情况完全一致. 在这种情况下的散射场是简正波的和. 每号简正波都有各自的散射系数. 我们对“简正波散射系数”与平面波散射系数进行比较后,给出了两者之间的关系. 波导散射和非波导散射通过这些关系发生了桥接.

## 一、散射场形式解

假定声源在上介质,在非波导情况,不平整的交界面使上介质中除了向下的人射波(源波)和镜向反射波之外,还包含有散向各个方向的散射波. 在波导中,作用于不平整交界面的场不再是简单的人射平面波,而一般是被表示为许多多途(简正波或射线)叠加形式的波导场. 但是,无论是非波导情况还是波导情况,如果因交界面的不平整性而产生的散射场比作用于交界面的源场小得多时,我们都可以把不平整性看作是产生散射场的“次源”激发机制,“次源”的强度正比于(假定界面是平整时的)初级声场的强度. 这一概念把粗糙界面的散射问题转化为位于“平整界面”上“次源”的场激发问题,给数学处理带来很大方便.

我们把交界面之上和之下的介质密度以及散射场速度势分别记作  $\rho_{1,2}$  和  $u_{1,2}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_i)$ , 其中  $\mathbf{R}$  是观察点坐标,  $\mathbf{r}_i$  是位于交界面平均平面上的散射点坐标. 下标“1”和“2”分别表示上介质和下介质. “次源”条件被写成:

$$\frac{\partial}{\partial z} u_1(\mathbf{R}, \mathbf{r}_i) - \frac{\partial}{\partial z} u_2(\mathbf{R}, \mathbf{r}_i) = V(\mathbf{r}_i)G^i(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_0), \quad (1)$$

$$\rho_1 u_1(\mathbf{R}, \mathbf{r}_i) - \rho_2 u_2(\mathbf{R}, \mathbf{r}_i) = p(\mathbf{r}_i)G^i(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_0). \quad (2)$$

等式(1)和(2)的右边代表“次源”,  $G^i$  是初级场,  $\mathbf{R}_0$  是声源坐标.  $V(\mathbf{r}_i)$  和  $p(\mathbf{r}_i)$  是算子,作用于  $G^i$  分别给出散射场在  $\mathbf{r}_i$  平面上的速度次源和压力次源的源强. 如果交界面是完全平整的平面,则  $V G^i = p G^i = 0$ , 这时(1)和(2)分别退化为人们所熟知的法向速度和声压连续条件.

散射场形式解可由格林公式给出. 我们首先讨论速度次源的格林函数  $G_{1V,2V}^i$ .  $G_{1V,2V}^i$  是满足下列波动方程和源条件的解:

$$\begin{cases} \nabla^2 G_{1V}^i + k_1^2 G_{1V}^i = 0, & (z > z_i) \\ \nabla^2 G_{2V}^i + k_2^2 G_{2V}^i = 0, & (z < z_i) \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} G_{1V}^i - \frac{\partial}{\partial z} G_{2V}^i = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}_i), \\ \rho_1 G_{1V}^i - \rho_2 G_{2V}^i = 0. \end{array} \right. & (z = z_i) \end{cases}$$

其中  $k_1$  和  $k_2$  分别是上下介质波数,  $\nabla^2$  是拉普拉斯算子,  $\delta(\mathbf{r})$  是 Dirac 函数. 由速度次源  $V G^i$  所激发的散射场  $u_{1V,2V}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$  则由格林公式给出:

$$u_{1V,2V}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \int G_{1V,2V}^i(\mathbf{R}, \mathbf{r}_i) V(\mathbf{r}_i) G^i(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_0) d\mathbf{r}_i. \quad (3)$$

不难证明,压力点源的格林函数  $G_{1P,2P}^i$  和速度点源的格林函数  $G_{1V,2V}^i$  有如下关系:

$$G_{i p, 2 p}^i = -\frac{1}{\rho_{1,2}} \frac{\partial}{\partial z'} G_{i v, 2 v}^i, \quad (z'_s \rightarrow z_s) \quad (4)$$

假设产生初级场的声源也是一速度点源,于是初级场  $G^i$  和格林函数  $G_{i v}^i$  又有

$$G^i(\mathbf{r}_s, \mathbf{R}_0) = s_0 G_{i v}^i(\mathbf{r}_s, \mathbf{R}_0) \quad (5)$$

的更简单的关系,其中  $s_0$  是声源源强. 对于单位体积速度点源,则取  $s_0 = 4\pi$ . 为了简单起见,以后把  $G^i$  和  $G_{i v}^i$  统一地记作  $G$ .

按叠加原理,总散射场是速度次源和压力次源所产生的散射场的和. 因此,由(3),(4)和(5)式,总散射场

$$u_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = s_0 \int_s \left[ G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s) V(\mathbf{r}_s) - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s)}{\partial z} p(\mathbf{r}_s) \right] G(\mathbf{r}_s, \mathbf{R}_0) d\mathbf{r}_s, \quad (6)$$

其中积分面积  $s$  指初级场所照射的有效散射面积. 由于我们最感兴趣的是声源和观察点在同一介质中的情况,所以下面只讨论  $u_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ .

算子  $v(\mathbf{r}_s)$  和  $p(\mathbf{r}_s)$  决定于粗糙交界面的不平整特性. 在小瑞利参数情况, BACC<sup>[5]</sup> 给出:

$$v(\mathbf{r}_s) = (k_1^2 - k_2^2/m) \zeta(\mathbf{r}_s) + (1 - m^{-1}) \nabla_{\perp} \cdot (\zeta \nabla_{\perp}), \quad (7)$$

$$p(\mathbf{r}_s) = (\rho_2 - \rho_1) \zeta(\mathbf{r}_s) \frac{\partial}{\partial z_s}, \quad (8)$$

其中  $m = \rho_2/\rho_1$ ,  $\nabla_{\perp}$  是水平梯度算子.  $\zeta(\mathbf{r}_s)$  是粗糙交界面上散射点相对它的平均平面的不平整高度,这个散射点的空间坐标在平均平面的投影为  $\mathbf{r}_{s,}$ .

在推导散射场形式解(6)的过程中,我们对上下介质未加任何限制,因此对波导和非波导情况同样适用.

## 二、非波导散射

为简单起见,假定交界面之上和之下都是均匀半无限介质. 因所得结果可以被推广到一般情况,所以不影响一般性. 在这一假定下,当交界面平整时,平面波反射系数

$$V(\theta_0) = \frac{mk_x - k_{2x}}{mk_x + k_{2x}}, \quad (9)$$

$$k_x = k_1 \cos \theta_0, \quad k_x = k_1 \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \quad k_y = k_1 \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \quad (10)$$

$\theta_0$  和  $\varphi_0$  分别是平面波入射角和水平方向角,  $k_{2x} = (k_2^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$ .

点声源在上介质中所产生的入射波  $\phi_{\lambda} = \exp(ik_1 R_1)/4\pi R_1$ . 利用球面波展开式<sup>[6]</sup>

$$\phi_{\lambda} = \frac{i}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp i[k_x(x-x_0) + k_y(y-y_0) + k_z(z_0-z_s)] \frac{dk_x dk_y}{k_z} \quad (11)$$

和球面波反射公式

$$\phi_{\text{反}} = \frac{i}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} V(\theta_0) \exp i[k_x(x-x_0) + k_y(y-y_0) + k_z(z_0+z_s)] \frac{dk_x dk_y}{k_z}, \quad (12)$$

得格林函数

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) = \phi_{\text{入}} + \phi_{\text{反}}. \quad (13)$$

正如我们通常在讨论混响或散射问题时对散射区域所作的假定一样, 这里也假定有效散射面积  $S$  的尺寸  $L \ll$  从源点到散射面积中心的距离  $R_1$ . 考虑到这一近似, 再对(11)和(12)式作稳相积分近似,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) = [\exp(ik_1 R_1)/4\pi R_1][\exp i(\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}, -k_z z) + V(\theta_0)\exp i(\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}, +k_z z)], \quad (14)$$

其中  $\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y$ ,  $\mathbf{r} = (x, y)$  是散射点相对散射面积中心的水平坐标. 稳相点方程使  $\theta_0$  和  $\varphi_0$  等于声源  $\mathbf{R}_0$  相对散射中心的垂直和水平方向角.

重复上述的处理过程, 格林函数  $G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_i)$  有相似的形式:

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_i) = [\exp(ik_1 R_2)/4\pi R_2][\exp i(-\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{r}_i - k'_z z_i) + V(\theta')\exp i(-\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{r}_i + k'_z z_i)], \quad (15)$$

其中  $R_2$  是观察点  $\mathbf{R}$  到散射面积中心的距离, 而  $\mathbf{k}'$  与观察点相对散射中心的垂直方向角  $\theta'$  和水平方向角  $\varphi'$  有如下关系:

$$k'_z = k_1 \cos \theta', \quad \mathbf{k}'_{\perp} = (k_1 \sin \theta' \cos \varphi', k_1 \sin \theta' \sin \varphi'). \quad (16)$$

当观察点和声源分在通过散射中心的法线的两侧时,  $\theta'$  和  $\theta_0$  同号. 反之,  $\theta'$  和  $\theta_0$  异号.

把(7),(8),(14)和(15)式代入(6)式, 对与(7)式中右边第二项有关的积分作分部积分, 并忽略边缘效应, 得到散射场表达式:

$$u_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \frac{s_0 f(\theta_0, \theta')}{(4\pi)^2 R_1 R_2} \exp i k_1 (R_1 + R_2) \int_S \zeta(\mathbf{r}_i) \exp [i(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}) \cdot \mathbf{r}_i] d\mathbf{r}_i, \quad (17)$$

其中

$$f(\theta_0, \theta') = k_1^2 \{ [(1 - n^2/m) - (1 - m^{-1}) \sin \theta_0 \sin \theta' \cos(\varphi_0 - \varphi')] [1 + V(\theta_0)] [1 + V(\theta')] + (m - 1) \cos \theta_0 \cos \theta' [1 - V(\theta_0)] [1 - V(\theta')] \}, \quad (18)$$

(18)式中的  $n = c_1/c_2$ . 由(17)和(18)可知,  $u_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = u_1(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$ , 即满足互易定理.

平面波散射系数  $m_s$  一般被定义为:

$$m_s = E_s / I_s, \quad (19)$$

其中  $E_s$  是距离散射中心单位距离的平均散射强度,  $I_s$  是入射平面波强度. 因为  $R_1 \gg L$ , 入射球面波的波阵面接近平面, 所以在我们这种入射波为球面波的情况下,  $I_s = s_0^2 / (4\pi R_1)^2$ . 另外, 由(17)式,  $E_s = I_s R_2^2 / s$ ,  $I_s = \overline{|u_1|^2}$ , “—”表示  $|u_1|^2$  对随机量  $\zeta(\mathbf{r}_i)$  作集合平均. 由(19)式,

$$m_s = \frac{|f(\theta_0, \theta')|^2}{(4\pi)^2 s} \iint_{s, s'} \overline{\zeta(\mathbf{r}_i) \zeta(\mathbf{r}'_i) \exp [i(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i)]} d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}'_i. \quad (20)$$

现在假定  $\zeta(\mathbf{r}_i)$  是空间齐次 (spatial homogeneity) 随机量, 并假定  $\zeta(\mathbf{r}_i)$  的相关半径  $\ll L$ , 则有

$$\overline{\zeta(\mathbf{r}_i) \zeta(\mathbf{r}'_i)} = \sigma^2 W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i),$$

其中  $\sigma^2$  是  $\zeta$  的方差,  $W(\mathbf{r})$  是  $\zeta$  的两维空间相关函数. 并且还有

$$\iint_{s, s'} W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i) \exp [i(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i)] d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}'_i$$

$$\begin{aligned}
 &= s \iint_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{r}) \exp[i(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}) \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r} \\
 &= (2\pi)^2 s \tilde{W}(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}),
 \end{aligned}$$

其中  $W(\mathbf{k})$  是  $\zeta$  的两维空间谱。这样一来, (20) 式可简单地写成

$$m_s = \sigma^2 |f(\theta_0, \theta')|^2 \tilde{W}(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}) / 4. \quad (21)$$

### 三、波导散射

波导散射的介质模型如图 1 所示, 它与非波导介质模型的唯一区别是上半空间还存在平面波反射系数等于  $V_r(\theta)$  的另一平整交界面。(如果取  $V_r = -1$ , 则退化为典型的均匀海洋液态海底的混响模型。) 此外, 再假设观察点和声源同在波导中, 而且重合, 因为这是我们最感兴趣的同地混响问题。

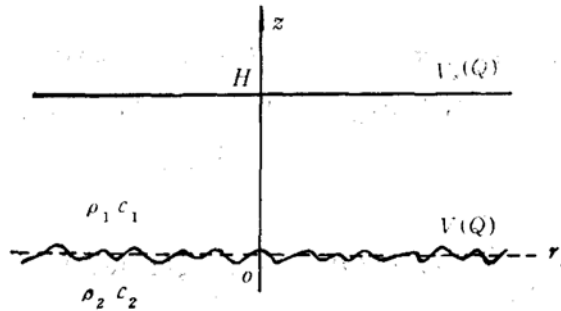


图 1 波导散射介质模型

在这样的介质模型中, 格林函数是众所周知的 pekris 问题解<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}_s, \mathbf{R}_0) &= -\frac{i}{2H} \sum_l F_l \cos[\xi_l(H - z_0) - i \ln V_r(\theta_l)/2] \\
 &\quad \times \cos[\xi_l(H - z_s) - i \ln V_r(\theta_l)/2] H_0^{(1)}(\mu_l r).
 \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $H$  是海深,  $r$  是散射点到声源的水平距离。  $\xi_l \equiv k_l \cos \theta_l$  是垂直波数, 由频散方程

$$\xi_l H = l\pi + i[\ln V(\theta_l) + \ln V_r(\theta_l)]/2, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

决定, 而  $\mu_l \equiv k_l \sin \theta_l$ 。  $F_l$  被称为简正波激发因子:

$$F_l \equiv \left[ 1 - i \left( \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \xi_l} + \frac{1}{V_r} \frac{\partial V_r}{\partial \xi_l} \right) / 2H \right]^{-1},$$

在一般情况下,  $F_l \approx 1$ 。  $H_0^{(1)}(\mu_l r)$  是第一类零阶 Hankel 函数, 这里取其渐近形式

$$H_0^{(1)}(\mu_l r) = (2/\pi \mu_l r)^{1/2} \exp(-i\pi/4 + i\mu_l r).$$

(22) 式被简写为:

$$G(\mathbf{r}_s, \mathbf{R}_0) = \sum_l p_l \cos[\xi_l(H - z_s) - i \ln V(\theta_l)/2] \exp[i\mu_l(r - r_0)] \quad (24)$$

其中

$$p_l = -\frac{F_l}{H \sqrt{2\pi \mu_l r_0}} \cos[\xi_l(H - z_0) - i \ln V_r(\theta_l)/2] \exp(i\mu_l r_0 + i\pi/4) \quad (25)$$

$r_0$  是散射面积中心到声源的水平距离。

在  $r_0 \gg L$  的条件下,

$$\begin{aligned} r - r_0 &= [(x_0 + x_s)^2 + (y_0 + y_s)^2]^{1/2} - r_0 = x_s x_0 / r_0 + y_s y_0 / r_0, \\ x_0 &\equiv r_0 \cos \varphi_0, \quad y_0 \equiv r_0 \sin \varphi_0, \end{aligned}$$

$\varphi_0$  是散射中心相对声源的水平方向角。现定义  $\mu_l \equiv (\mu_l \cos \varphi_0, \mu_l \sin \varphi_0)$ , 于是(24)式中的相位因子  $\mu_l(r - r_0) = \mu_l \cdot \mathbf{r}_s$ 。

观察点和声源置于同一点意味着  $G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s) = G(\mathbf{r}_s, \mathbf{R}_0)$ 。把(7),(8)和(24)代入形式解(6),波导散射(混响)场表达式成为

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) &= s_0 \sum_{l,j} p_l p_j f_{lj} / 4 [V(\theta_l) V(\theta_j)]^{1/2} \\ &\quad \times \int_S \zeta(\mathbf{r}_s) \exp[i(\boldsymbol{\mu}_l + \boldsymbol{\mu}_j) \cdot \mathbf{r}_s] d\mathbf{r}_s, \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} f_{l,j} &= 4[V(\theta_l) V(\theta_j)]^{1/2} \{ [(k_l^2 - k_j^2/m) + (1 - m^{-1})\mu_l \mu_j] \cos[\xi_l H - i \ln V_l(\theta_l)/2] \\ &\quad \times \cos[\xi_j H - i \ln V_j(\theta_j)/2] - (m - 1)\xi_l \xi_j \sin[\xi_l H - i \ln V_l(\theta_l)/2] \\ &\quad \times \sin[\xi_j H - i \ln V_j(\theta_j)/2] \}. \end{aligned} \quad (27)$$

平均混响强度  $I_R \equiv |\overline{u_1}|^2$ , 从(23)式, 可被写成:

$$I_R = \sum_{l,j} + \sum_{l,j} \sum_{l' \neq l, j' \neq j},$$

式中第二项所反映的是  $l' \neq l, j' \neq j$  的不同号筒正波之间的干涉效应, 在讨论混响问题时它的影响一般予以忽略。事实上, 即使对于声传播问题, 当讨论平均平滑声场时一般也都作了这样的近似处理<sup>[7]</sup>。我们知道, 混响信号除上述的多途效应外, 同时还因为是从不同方向返回的许多随机的元散射波的总和, 所以我们在实验中记录到的混响信号一般都是觉察不出干涉效应的随时间的平稳下降曲线。

略去干涉项后, 平均混响强度

$$I_R = \sum_{l,j} I_{l,j}^i, \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} I_{l,j}^i &= s_0^2 |p_l p_j f_{lj} / 4 [V(\theta_l) V(\theta_j)]^{1/2}|^2 \int_S \int_{S'} \overline{\zeta(\mathbf{r}_s) \zeta(\mathbf{r}'_s)} \\ &\quad \times \exp[i(\boldsymbol{\mu}_l + \boldsymbol{\mu}_j) \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_s)] d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}'_s \\ &= (2\pi)^2 s_0^2 \sigma^2 |p_l p_j f_{lj} / 4 [V(\theta_l) V(\theta_j)]^{1/2}|^2 \widetilde{W}(\boldsymbol{\mu}_l + \boldsymbol{\mu}_j). \end{aligned} \quad (29)$$

元散射波强度  $I_{l,j}^i$  可以被解释为第  $l$  (或  $j$ ) 号源筒正波 (通过交界面的不平整性) 所激发的第  $j$  (或  $l$ ) 号散射筒正波的散射强度。

为了便于与非波导情况进行比较, 把源筒正波分解为上行平面波和下行平面波, 而且把指向粗糙交界面的下行平面波看作与非波导情况等同的入射平面波。因此对元散波  $I_{l,j}^i$  来说, 从(24)式, 入射平面波强度

$$I_l^i = s_0^2 |p_l|^2 / 4. \quad (30)$$

在强度为  $I_l^i$  的平面波的作用下, 由次源产生的第  $j$  号散射筒正波, 单位散射面积单位距离处

的散射强度

$$E_{ij}^s = I_{ij}^s / s |p_j|^2. \quad (31)$$

类似于非波导情况关于平面波散射系数  $m_i$  [(19)式]的定义,现在定义  $m_{ij}^s \equiv E_{ij}^s / I_i^i$ ,  $m_{ij}^s$  被称作“简正波散射系数.”由(29)–(31)式,

$$m_{ij}^s = (2\pi)^2 [\sigma^2 |f_{ij}|^2 \tilde{W}(\boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\mu}_j)] / 4 |V(\theta_i)V(\theta_j)|. \quad (32)$$

下面讨论  $m_{ij}^s$  和  $m_i$  之间的关系. 由频散方程(23),得

$$\begin{aligned} \cos[\xi_i H - i \ln V_i(\theta_i)/2] &= (-1)^l [1 + V(\theta_i)] / 2 [V(\theta_i)]^{1/2} \\ \sin[\xi_i H - i \ln V_i(\theta_i)/2] &= (-1)^l [1 - V(\theta_i)] / 2 [V(\theta_i)]^{1/2}. \end{aligned}$$

把以上两式以及关系式  $\xi_i = k_i \cos \theta_i$  和  $\mu_i = k_i \sin \theta_i$  代入(27)式,得

$$\begin{aligned} f_{ij} &= (-1)^{l+j} k_i^2 \{ [(1 - n^2/m) + (1 - m^{-1}) \sin \theta_i \sin \theta_j] [1 + V(\theta_i)] [1 + V(\theta_j)] \\ &\quad + (m - 1) \cos \theta_i \cos \theta_j [1 - V(\theta_i)] [1 - V(\theta_j)] \}. \end{aligned} \quad (33)$$

由于观察点和声源在同一点,对应到非波导情况,相当于  $\varphi' = \varphi_0$  和  $\theta' = \theta_0$ . 如果取  $\theta_0 = \theta_i$ ,  $\theta' = \theta_j$ ,  $\mathbf{k}_\perp = \boldsymbol{\mu}_i$  和  $\mathbf{k}'_\perp = \boldsymbol{\mu}_j$ , 那么从(18)和(27)式可以看到,  $f_{ij} = f(\theta_0, \theta')$ . 结果,由(21)和(32)式,

$$m_{ij}^s = [(2\pi)^2 / |V(\theta_i)V(\theta_j)|] m_i. \quad (34)$$

在  $\theta_i$  和  $\theta_j$  都大于全内反射角情况,即  $V(\theta_i) = V(\theta_j) = 1$ ,  $m_{ij}^s$  和  $m_i$  之间还有更简单的关系:  $m_{ij}^s = (2\pi)^2 m_i$ .

## 小 结

我们在 BACC 微扰基础上给出了散射场形式解. 从形式解出发统一地导出了非波导和波导情况下的散射强度. 波导散射强度

$$I_R = \sum_{i,j} I_{ij}^s, \quad I_{ij}^s = s m_{ij}^s I_i^i |p_j|^2.$$

波导散射和非波导散射之间的关系通过

$$m_{ij}^s = m_i (2\pi)^2 / |V(\theta_i)V(\theta_j)|$$

发生桥接.

## 参 考 文 献

- [1] Beckman, P. and Spizzichino, A., "The scattering of electromagnetic waves from rough surface", (Oxford, Pergamon Press, 1963).
- [2] Bass, F. G. and Fuks, F. G., "Wave scattering from statistically rough surfaces", translated and edited by Carol, B. Vesecky and John, F. Vesecky from Russian, (Pergamon Press, 1979).
- [3] Urlick, R. J., "The process of sound scattering at the ocean surface and bottom", *J. Marine Res.*, 15(1956), 134.
- [4] Mackenzie, K. V., "Bottom reverberation for 530 and 1030 cps sound in deep water", *J. Acoust. Soc. Am.*, 33 (1961), 1498.
- [5] See Yef. [2], p. 104.
- [6] 布列霍夫斯基赫, Л. М., "分层介质中的波", (科学出版社, 1985).
- [7] 汪德昭、尚尔昌, "水声学", (科学出版社, 1981).