

压电晶体表面激发的二维声表面波 Green 函数*

范 思 齐 汪 承 灏

(中国科学院声学研究所)

1986年7月24日收到, 1987年4月17日收到修改稿

摘要 最近, 我们研究了在压电晶体半空间表面激发的二维广义 Green 函数。在本文将仔细讨论广义 Green 函数的表面波部分。用稳相法给出声表面波远场渐近解。但是由于这样的渐近解在接近慢度曲线的拐点处失效, 我们发展了用变型 Airy 函数表示的普适渐近解, 从而解决了在拐点附近的解的衔接问题。

对于 Y 切 LiNbO_3 , 进行了声表面波 Green 函数分量和功率流密度的数值计算, 结果表明在 Y 切 LiNbO_3 的 Z 方向上出现聚焦现象。

TWO DIMENSIONAL SAW GREEN'S FUNCTIONS FOR SURFACE EXCITATION OF PIEZOELECTRIC CRYSTAL

FAN SI-QI WANG CHENG-HAO

(Institute of Acoustics, Academia Sinica)

Received July 24, 1986

Abstract Recently we have investigated two-dimensional generalized Green's functions for surface excitation in a half space of piezoelectric crystal. In this paper, the SAW part of generalized Green's functions are discussed in detail. On using the method of stationary phase, the asymptotic behavior of SAW far fields is obtained. But, since such asymptotic solutions near the turning points of slowness curve fail, the general asymptotic solutions expressed by a varied Airy function are developed. And the joining problem of solutions near the turning points can be resolved.

Finally, for the Y-cut LiNbO_3 , the components and the power flux density of SAW Green's function at far fields are numerically calculated. The results show that focusing phenomena at the Z direction Y-cut LiNbO_3 is presented.

一、引 言

叉指换能器在压电晶体表面有效地激发声表面波, 相应地开展了对叉指换能器这种电源

* 本工作得到国家自然科学基金支持。

激发表面波的理论分析^[1,2]。而文献[3,4]给出了一个包括力源和电源分布激发下产生的弹性波场全面统一的分析。但这些分析都是表面源。局限于是一维分布。

但是,所有的表面激发源都是有限的,二维的。我们在文献[5]中,将一维分布推广到二维分布。引进二维广义 Green 函数,得到压电晶体半空间表面二维源分布所激发产生的广义弹性波场:它就是表面源分布的各个点源所激发场的叠加。而点源所激发的场正好对应广义 Green 函数。

本文将深入分析表面点源所激发的声表面波场,也就是广义 Green 函数中对应表面波部分。

二、广义 Green 函数表面波解的一般分析

考虑一压电晶体半空间,表面坐标为 (x_1, x_2) , 指向晶体内部的深度方向为 x_3 。文献[5]中给出表面激发的广义 Green 函数为

$$G_{mp}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^4 \frac{W_{np} \cdot B_{mn}}{\det \Pi} \exp[j(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma_n x_3)] d\alpha d\beta \quad (1)^*$$

$(m, p = 1, 2, 3, 4)$

G_{mp} 即为第 p 个广义力点源激发的第 m 个位移分量。广义力前三个分量为表面三个应力分量 $T_{3p}(p = 1, 2, 3)$, 第四个广义力 $T_4 \equiv T_e$ 为表面电源分布^[5]。第四个位移分量 ($m = 4$) 表示电势分布。

在式(1)中被积函数的极点贡献就是本文要详细讨论的表面波解。为求解,我们先固定某一参数,比如 α , 对 β 求积。注意到仅在有限区间 $(-\alpha_0, \alpha_0)$ 内,实轴上存在极点 $\pm\beta_s$, 由留数定理,得广义 Green 函数表面波解为:

$${}_s G_{mp}(x_1, x_2, x_3) = \pm \frac{j}{2\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(\sum_{n=1}^4 \frac{W_{np} B_{mn}}{\frac{\partial}{\partial \beta} \det \Pi} e^{j\gamma_n x_3} \right)_{\beta_s} \exp[j(\alpha x_1 \pm \beta_s x_2)] d\alpha \quad (2)$$

其中,波矢(慢度)曲线 $\{\alpha, \beta_s\}$ 由 $\det(\alpha, \beta_s) = 0$ 所确定。可以证明,上述积分次序可交换,即先固定 β , 先对 α 求积,它们是等当的。

三、 $\{G_{mp}\}$ 远场渐近解分析及其性质

积分式(2)的一般求解较为复杂。我们对通常更为关心的远场渐近解作较详尽的分析。我们用稳相法求渐近解。在一般情况,由初阶稳相积分公式,得到

$${}_s G_{mp} \simeq \frac{j}{(2\pi r |\dot{\beta}_s \sin \varphi|)^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^l \left(\sum_{n=1}^4 \left(\frac{W_{np} B_{mn}}{\frac{\partial}{\partial \beta} \det \Pi} \right)_{\beta_s} \cdot \exp j \left[\alpha_s x_1 + \beta_s x_2 + \gamma_n x_3 + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(\dot{\beta}_s) \right] \right) \quad (3)$$

* 式(1)右边中诸符号: $\alpha, \beta, \{\gamma_n\}, \{B_{mn}\}, \Pi, \{W_{np}\}$ 等的含义和表达均见文献[5]。

其中 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, ϕ 为 r 与 x_1 夹角, 稳相点由稳相方程:

$$d\beta_s(\alpha_s)/d\alpha = -\text{ctg } \phi \quad (4)$$

确定. i 表示对满足 (4) 式的 l 个稳相点求和.

上述解对于慢度曲线上一般点是适合的. 但如果曲线上存在拐点, 由于拐点上

$$\ddot{\beta}_s(\alpha_s) = 0,$$

上式失效. 此时要用高阶稳相公式, 得到解为:

$${}_i G_{mp} \simeq i \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3\pi} \left(\frac{6}{r}\right)^{\frac{1}{3}} \sum_{n=1}^4 \left(\frac{W_{np} B_{mn}}{\frac{\partial}{\partial \beta} \det \Pi}\right)_{\beta_s} \cdot \frac{\exp j \left[\alpha_s x_1 + \beta_s x_2 + \gamma_n x_3 + \frac{\pi}{6} \text{sgn}(\ddot{\beta}_s) \right]}{[|\ddot{\beta}_s(\alpha_s) \sin \phi|]^{1/3}} \quad (5)$$

这就是说, 稳相点为一般点时, 波场位移正比于 $r^{-1/2}$, 而在拐点, 波场位移正比于 $r^{-1/3}$. 因而在这方向上, 随着距离 r 的增加, 物理上将出现能流会聚现象.

进而, 我们可得出在广义力分布 $\{T_p\}$ 下, 广义弹性波场在远场表面波解为

$${}_i U_m \sim \sum_{p=1}^4 {}_i G_{mp} \cdot \tilde{T}_p(\alpha_s, \beta_s) \quad (6)$$

其中 $\tilde{T}_p(\alpha, \beta)$ 为广义力 T_p 的双重傅氏变换.

可以证明(证明从略). 表面波广义 Green 函数具有以下性质:

(1) 存在共轭关系:

$${}_i G_{mp}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_3) = -{}_i G_{mp}^*(-\mathbf{r}, \mathbf{x}_3) \quad (\mathbf{r} = \{x_1, x_2\}) \quad (7)$$

即在两相反方向所激发的表面波强度相等而成共轭关系.

(2) 在表面, 有互易关系.

$${}_i G_{mp}(\mathbf{r}, 0) = -{}_i G_{pm}^*(\mathbf{r}, 0) \quad (8)$$

(3) 在单稳相点及远场条件下有

$${}_i G_{m1} : {}_i G_{m2} : {}_i G_{m3} : {}_i G_{m4} = W_{1l} : W_{2l} : W_{3l} : W_{4l}, \quad (m, l = 1, 2, 3, 4) \quad (9)$$

表示广义力矢量 \mathbf{T} 各分量之间“激发效率”之比.

(4) 在单稳相点及远场条件下有

$${}_i G_{1p} : {}_i G_{2p} : {}_i G_{3p} : {}_i G_{4p} = \{U_1^t : U_2^t : U_3^t : U_4^t\}_{\text{能流方向}} \quad (p = 1, 2, 3, 4) \quad (10)$$

这与一维情况的结论^[4]稍有不同, 在某一观察方向激发的波是与能流在此方向的一维自由表面波模式相同.

四、变型 Airy 函数表示 $\{{}_i G_{mp}\}$ 的渐近解

分析得知, 渐近解 (3) 与 (5), 不能在拐点附近衔接起来, 因而无法给出拐点附近的声表面波场. 为解决此困难, 本节将给出用变型 Airy 函数给出的普适解.

在积分解 (2) 式中, 以拐点为界, 将积分分成二部分, 并且在稳相求解时保留到三阶项. 作代换

$$\alpha - \alpha_s = S / (r \ddot{\beta}_s(\alpha_s) \sin \phi / 2)^{1/3} - \ddot{\beta}_s / \ddot{\beta}_s$$

考虑在 r 很大时, 得到普适解为

$$\begin{aligned}
 {}_s G_{mp} \simeq & \frac{j}{2} \left(\sum_{n=1}^4 \left(\frac{W_{np} \cdot B_{mn}}{\frac{\partial}{\partial \beta} \det \Pi} \right)_{\beta_s} \cdot \exp j \left(\alpha_s x_1 + \beta_s x_2 + \gamma_n x_3 + \frac{\beta_s^3 r \sin \phi}{3\beta_s^2} \right) \right) \\
 & \cdot \left(\frac{2}{r |\beta_s \sin \phi|} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \begin{cases} D_i^+(y) & \beta_s > 0 \\ D_i^-(y) & \beta_s < 0 \end{cases} \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中变型 Airy 函数定义为:

$$D_i^\pm(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp \pm j \left(\frac{S^3}{3} - yS \right) ds \quad (12)$$

而

$$y = \beta_s^2 (r \sin \phi)^{2/3} / (2^{2/3} \beta_s^{4/3})$$

当稳相点远离拐点, 即 y 较大时, 由稳相法得出:

$$D_i^\pm(y) \simeq \frac{2^{\frac{1}{3}} |\beta_s|^{\frac{1}{3}}}{|\beta_s|^{\frac{1}{2}} (r \sin \phi)^{1/6}} \exp \pm j \left(\frac{\pi}{4} - \frac{|\beta_s|^3 (r \sin \phi)}{3\beta_s^2} \right) \quad (13)$$

代入 (11) 式, 即可得初阶稳相解, (3) 式. 在拐点, $y = 0$ 不难得出:

$$D_i^\pm(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3\pi} \cdot 3^{\frac{1}{3}} e^{\pm i \frac{\pi}{6}} \quad (14)$$

代入 (11) 式, 即可得高阶稳相解, (5) 式. 这样, 普适解 (11), 就可给出拐点附近声场行为, 从而解决了解的衔接困难.

五、数值计算结果

对 Y 切 LiNbO_3 , 计算在距离 1000 个波长处, 广义 Green 函数指向性分布.

图 1 为表面应力点源所激发的表面波场*. 由图可见, 在 T_{31} 和 T_{33} 激发下, 在 Z 轴上, Y 和 Z 方向位移为极大, 而 X 方向(切向)位移较小, 但不象线源那样为零. 其起因是在 Z 轴附近有三个稳相点, 即有三股波叠加, 故此时存在极大的 Y 和 Z 方向位移. 切向位移虽然来自慢度曲线的 Z 方向者为零, 但另外两股波并不为零. 此外还存在 $|{}_s G_{mp}| = |{}_s G_{pm}|$, 这也验证了上述式 (8) 的结论. 而在图 2 给出了在电激发下, 各位移分量和电势的指向性图. 同时也表明, 在力学激发下的电势分布, 存在有关系 $|{}_s G_{mp}| = |{}_s G_{pm}|$.

在 Z 轴 (YZ LiNbO_3) 附近, 图 3a 及 3b 分别数值计算变型 Airy 函数及初阶解的 Green 函数这两种解在远离拐点的衔接趋势以及在拐点附近的细致行为. 由图 3a 可知, 随着观察方向 ϕ 远离 Z 轴, 或者观察距离愈远, 两解重合地愈好. 由图 3b 看出, 两种解在 Z 轴附近差别甚大, 虚线表示距离为 1000 个波长时的初阶解的发散趋势: 在拐点(对 Y 切 LiNbO_3 , 为距 Z 轴 $\pm 0.08^\circ$ 处), 它不连续且发散. 而由实线表示的 Airy 函数解则抑制了这一发散, 亦有明显的会聚效应. 在图中距离为 20000 波长下, 计算的声场有些起伏, 看来是由于相位剧烈变化的缘故. 此外并非拐点法向声场最强. 因为这方向附近的声场极为复杂, 它是多股波合成的结果.

* 在图 1, 图 2 中, G_{ij} 下标所对应的 LiNbO 晶轴方向为: 1-Z, 2-X, 3-Y, 而 4 对应电势 ϕ .

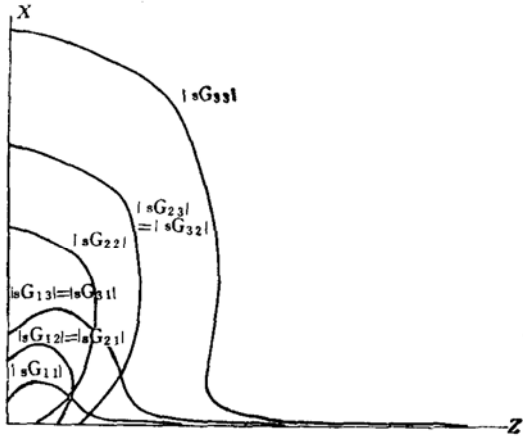


图 1 表面应力点源激发的位移指向性图
Directional patterns of displacement fields excited by surface stress point sources

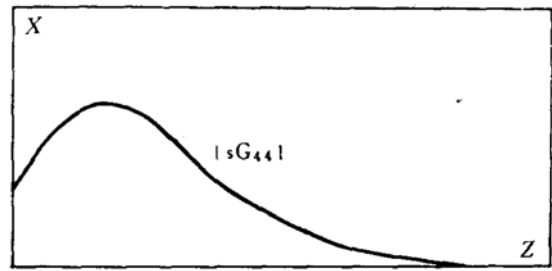
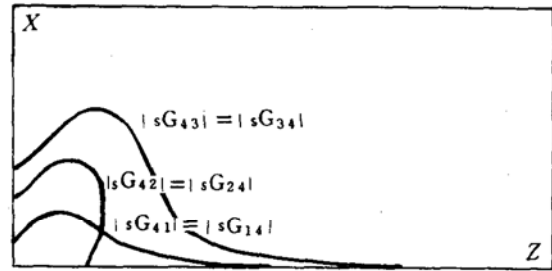


图 2 表面电点源激发下的位移和电势的指向性图
Diredirectional patterns of displacement and electric potential excited by surface stress point sources

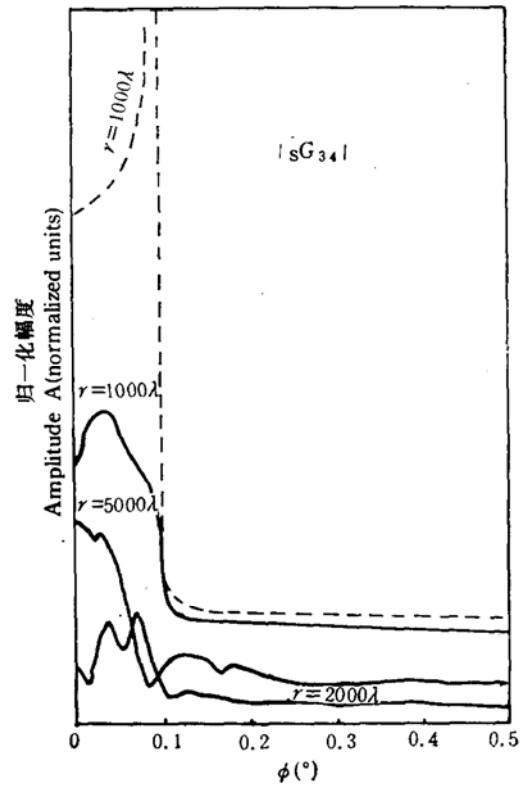
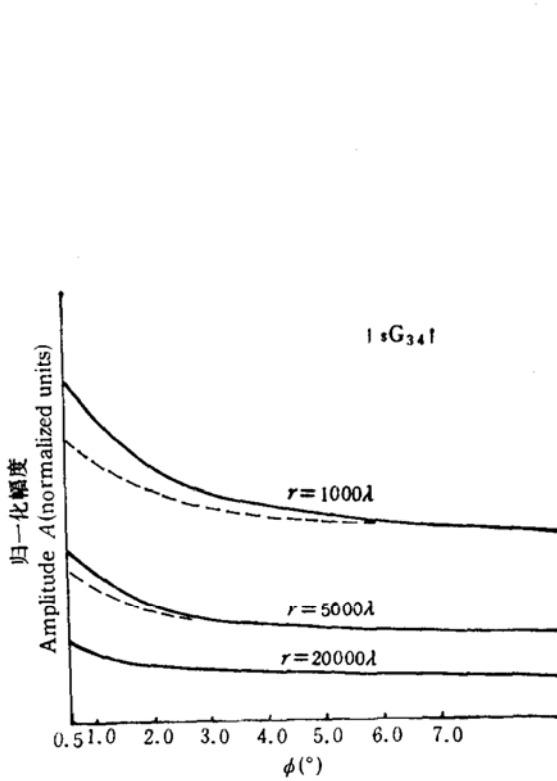


图 3 稳相法和变型 Airy 函数的渐近解比较

Comparison of solutions obtained by the method of stationary phase and varied Airy function

本文工作曾与刘援、陈东培同志等进行过有益的讨论,特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Milson, R. F. *et al.*, "Analysis of Generation and Detection of Surface and Bulk Acoustic Waves by Interdigital Transducers", *IEEE Trans on Sonics and Ultrasonics.*, **SU-24**(1977), 147—166.
- [2] Morgan, D. P., "Quasi-static Analysis of Generalized SAW Transducers using the Green's Function Method", *IEEE Trans on Sonics and Ultrasonics*, **SU-27**(1980), 77—81.
- [3] 汪承灏, 陈东培, "压电晶体半空间弹性波场的表面激发的分析(I)——弹性波场表面激发的一般公式," *声学学报*, **10**(1985), No. 1, 1—12.
- [4] 汪承灏、陈东培, "压电晶体半空间弹性波场的表面激发的分析(II)——广义 Green 函数", *声学学报*, **10**(1985), No. 2, 96—111.
- [5] 汪承灏, 范思齐, "压电晶体表面任意源分布所产生的弹性波场", *中国科学 A 辑*, (1988), No. 3