

压电圆柱对平面声波的散射——换能器的 传递函数、瞬态响应及其相位重现

任 树 初

(中国科学院声学研究所)

1983年3月5日收到

摘 要

在克希霍夫假定下,本文提出了径向极化压电圆柱的薄壳理论。作为理论的一个应用,我们利用格林函数和分离变量法求解了压电圆柱对平面声波的散射问题,得到了圆柱表面振速分布和总声场的简正波级数表达式。由此给出了压电圆柱作为声接收器的传递函数的解析表达式,利用FFT便可算出其瞬态响应。

对于PZT-5压电陶瓷圆柱,计算了它的传递函数、脉冲响应和阶跃响应。计算结果表明,脉冲响应呈现出典型的最小相位行为,因此压电圆柱接收器属于最小相位系统,从而它的传递函数的相位谱可以利用希尔伯特变换从它的振幅谱重现出来。由此得到的相位谱与从传递函数的解析表达式直接计算的相位谱满意地符合。由此推论,如果已知换能器是最小相位系统,则它的传递函数的相位谱可以利用希尔伯特变换从它的振幅谱的测量值重现出来。考虑到相位谱实际测量的种种困难,而振幅谱的测量则十分简便,因此相位谱的重现具有很重要的实际意义。

一、引 言

压电陶瓷圆柱形换能器是应用最广泛的一类换能器,但对这种换能器性能的理论分析还远远不够。到目前为止这类换能器的传递函数以及它的瞬态响应理论计算尚未见公开报道过。

随着计算机的广泛应用和数字信号处理的蓬勃发展,在信道传输特性的实验研究、目标散射特性的实验研究、阵信号处理以及多普勒容限信号的构造等等领域中,换能器的传递函数和瞬态响应的研究显然是愈来愈重要了。这是因为在这些领域中,换能器常常是作为总的线性系统中的一个级联子系统出现的,若已知换能器的传递函数或脉冲响应,我们便可以很简单地排除它的影响从而得到所研究对象的信息。因此对压电陶瓷圆柱形换能器的传递函数和瞬态响应进行理论研究是很有意义的。

在本文中,为了比较严格地进行分析,我们提出了径向极化压电圆柱的薄壳理论。这种理论不同于通常的薄膜理论,不但考虑了薄膜应力而且还计及了弯曲应力,因此它所能处理的问题应当是更广泛的。

作为这个理论的一个应用,我们利用格林函数和分离变量法求解了无限长压电圆柱对平面声波的散射问题,得到了圆柱表面振速分布和总声场的简正波级数表达式。

对于平面入射声波来说, 压电圆柱既是一个散射体又是一个声接收器, 因此利用所得到的表达式很容易求出压电圆柱作为接收器的传递函数的解析表达式。

对于 PZT-5 压电陶瓷圆柱, 计算了它的传递函数的振幅谱和相位谱。为了研究绕射系数对接收器的传递函数的影响, 将绕射系数视为一个滤波器分别计算了有无此滤波器时的接收器的传递函数的振幅谱和相位谱。同时也计算了绕射系数的振幅谱和相位谱。从计算结果可以明显看出, 绕射系数的振幅谱和相位谱对接收器的传递函数的振幅谱和相位谱有显著影响。

此外, 从传递函数的解析表达式利用 FFT 得到了脉冲响应和阶跃响应。计算结果表明, 圆柱形接收器的脉冲响应呈现出典型的最小相位行为, 由此可断定接收器属于最小相位系统, 因此它的传递函数的相位谱可以利用希尔伯特变换从它的振幅谱重现出来。由此得到的相位谱与从传递函数的解析表达式直接计算的相位谱满意地符合。

一般说来, 换能器的传递函数或脉冲响应的严格计算是比较复杂的, 有时甚至是很困难的。因此如何从实验上来得到换能器的传递函数便显得十分重要了。

近年来, 随着计算机的广泛应用和数字信号处理的蓬勃发展, 国内外都开展了换能器的复数灵敏度(即传递函数)的校准工作。在频域校准中需要有极其精密的距离调节装置, 而在时域校准中则要求设备有很高的采样频率和足够的信号带宽。这些都使相位谱的测量受到了限制。另一方面, 如果已知换能器满足最小相位条件, 则我们就可以利用希尔伯特变换从传递函数的振幅谱的测量值重现它的相位谱, 而传递函数的振幅谱的测量则是十分简便的。所以换能器的相位重现有很重要的实际意义。

二、压电圆柱薄壳的运动方程

对于均匀各向同性的圆柱薄壳, 描写薄壳的微分方程组有各种不同的形式, 但它们所给出的数值结果的差别是不大的。因此我们可以任选一种薄壳理论体系来建立压电圆柱的薄壳理论。下面我们依照赖斯纳 (R. Reissner)^[1] 处理各向同性圆柱薄壳的小挠度理论相类似的方法来建立径向极化压电陶瓷圆柱的薄壳理论, 所依据的基本假定是著名的克希霍夫假定:

- (1) 变形前中面的法线在变形后仍为变形后的中面的法线。
- (2) 在应力应变关系中, 与别的应力分量比较, 沿薄壳厚度方向的法向应力分量可忽略。

令 z, φ 分别表轴向和周向坐标, x 表示由压电圆柱薄壳中面算起的距离, u, v 和 w 分别表中面的轴向, 切向和法向位移, \ddot{u}, \ddot{v} 和 \ddot{w} 分别表示相应的加速度, 则依照赖斯纳的薄壳理论体系, 在忽略转动惯量和切变的条件下, 类似地推导有:

力的平衡方程:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial N_{z\varphi}}{\partial \varphi} &= \rho_1 h a \ddot{u}, \\ a \frac{\partial N_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} - Q_\varphi &= \rho_1 h a \ddot{v}, \\ a \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + N_\varphi + a p &= \rho_1 h a \ddot{w}, \end{aligned} \quad (1)$$

力矩平衡方程:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial M_{z\varphi}}{\partial z} - \frac{\partial M_{\varphi}}{\partial \varphi} + a Q_{\varphi} &= 0, \\ \frac{\partial M_{\varphi z}}{\partial \varphi} - a \frac{\partial M_z}{\partial z} + a Q_z &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

式中 p 是壳体表面的负载压强, ρ_1 、 h 和 a 分别是壳体的密度, 壁厚和半径, 力 N_z , $N_{z\varphi}$, N_{φ} , Q_{φ} , Q_z 和力矩 $M_{z\varphi}$, M_{φ} , M_z 的定义如下:

$$\begin{aligned} N_z &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_z \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx, & N_{\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi} dx, \\ N_{z\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{z\varphi} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx, & N_{\varphi z} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{\varphi z} dx, \\ Q_z &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{zx} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx, & Q_{\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{\varphi x} dx, \\ M_z &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_z \left(1 - \frac{x}{a}\right) x dx, & M_{\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi} x dx, \\ M_{z\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} -\tau_{z\varphi} \left(1 - \frac{x}{a}\right) x dx, & M_{\varphi z} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} -\tau_{\varphi z} x dx, \end{aligned} \tag{3}$$

应变位移关系:

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z} - x \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \\ \epsilon_{\varphi} &= \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{a} - x \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \varphi^2} \right), \\ \gamma_{z\varphi} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{x}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \varphi} \right), \end{aligned} \tag{4}$$

压电方程:

$$\begin{aligned} T_a &= c_{ab}^E S_b - e_{qa} E_q, \\ D_p &= e_{pb} S_b + \epsilon_{pq}^E E_q, \end{aligned} \tag{5}$$

式中 T_a , S_b , E_q 和 D_p 分别是应力, 应变, 电场和电位移分量, c_{ab}^E , e_{qa} 和 ϵ_{pq}^E 分别是弹性, 压电和介电常数.

对于径向极化压电陶瓷圆柱薄壳, 将压电方程展开并利用克希霍夫假定, 即:

$$\sigma_x = 0; \gamma_{zx} = 0, \gamma_{x\varphi} = 0, \tag{6}$$

经过整理得到:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} &= \left(c_{11}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E} \right) \epsilon_{\varphi} + \left(c_{12}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E} \right) \epsilon_z - \left(e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \right) E_x, \\ \sigma_z &= \left(c_{12}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E} \right) \epsilon_{\varphi} + \left(c_{11}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E} \right) \epsilon_z - \left(e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \right) E_x, \\ \tau_{z\varphi} &= \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} \gamma_{z\varphi}. \end{aligned} \tag{7}$$

将(4),(7)式代入(3)式积分,并在积分前取近似 $\left(1 - \frac{x}{a}\right) \simeq 1$, 此外由(1)和(2)式消去 Q_z, Q_φ , 然后将所得到的力和力矩的积分代入,我们便得到压电圆柱薄壳所满足的运动方程:

$$\begin{aligned} & \left(c_{12}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E}\right) \left[\frac{1}{a} \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}\right] + \left(c_{11}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E}\right) \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial z^2} \\ & + \frac{(c_{11}^E - c_{12}^E)}{2} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial \varphi \partial z} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2}\right] + \omega^2 \rho_1 \dot{u} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(c_{11}^E - c_{12}^E)}{2} \left[\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial z^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial z}\right] + \left(c_{11}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E}\right) \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi}\right] \\ & + \left(c_{12}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E}\right) \frac{\partial^2 \dot{u}}{a \partial \varphi \partial z} + \frac{h^2}{12a^2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 \dot{w}}{\partial \varphi \partial z^2}\right] \\ & + \frac{h^2}{12a^2} \left(c_{11}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E}\right) \left[\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\dot{v}}{a} - \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi}\right)\right] \\ & - \frac{h^2}{12a^2} \left(c_{12}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E}\right) \frac{\partial^3 \dot{w}}{\partial \varphi \partial z^2} + \omega^2 \rho_1 \dot{v} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & - \left(c_{12}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E}\right) \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} - \left(c_{11}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E}\right) \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi} + \dot{w}\right] \\ & - \frac{h^2}{12a^2} \left(c_{12}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E}\right) \cdot \left[2 \frac{\partial^4 \dot{w}}{\partial \varphi^2 \partial z^2} - \frac{\partial^3 \dot{v}}{\partial \varphi \partial z^2}\right] \\ & - \frac{h^2}{12a^2} \left(c_{11}^E - \frac{c_{13}^{E^2}}{c_{33}^E}\right) \left[a^2 \frac{\partial^4 \dot{w}}{\partial z^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 \dot{w}}{\partial \varphi^4} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 \dot{v}}{\partial \varphi^3}\right] \\ & - \frac{h^2}{12a^2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \left[\frac{2\partial^4 \dot{w}}{\partial \varphi^2 \partial z^2} - \frac{\partial^3 \dot{v}}{\partial \varphi \partial z^2}\right] + \omega^2 \rho_1 \dot{w} \\ & = \left(e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E}\right) \frac{i\omega}{ha} V + \frac{i\omega}{h} p(a, \varphi, z), \end{aligned} \quad (10)$$

式中 \dot{u}, \dot{v} 和 \dot{w} 分别是圆柱薄壳中面的位移速度, V 是圆柱薄壳内外电极之间的电位差, 在推导时我们假定电场在通过圆柱薄壳时是均匀分布的, ω 是圆频率, 时间因子是 $e^{-i\omega t}$, 为了方便省去不写. 在(1)式中 ω 的方向是指向圆柱轴的, 而 p 表压力, 为了以后讨论方便在(8),(9)和(10)式中的 ω 前均乘了一个负号, 与此相应, 在 p 之前也乘了一个负号.

换能器内电极单位长度上的电流可由电位移算出:

$$I = -i\omega \int_0^{2\pi} D_x a d\varphi \quad (11)$$

式中 D_x 是圆柱薄壳中的电位移矢量的径向分量, 因为压电陶瓷内部无自由电荷. 因此(11)式中的 D_x 可选在薄壳壁内的任何位置, 为方便起见选在薄壳的中面上, 由(5)式中的逆压电方程得到:

$$\left(e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E}\right) \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi} + \frac{\dot{w}}{a}\right) - \left(e_{33}^E + \frac{e_{33}^{E^2}}{c_{33}^E}\right) i\omega \frac{V}{h} = -i\omega D_x, \quad (12)$$

这就是薄壳中面上的 D_x 所满足的方程.

三、压电圆柱对平面声波的散射

设平面声波

$$p_i(r, \varphi, z) = \exp[ik \cos \theta \cos \varphi r + ik \sin \theta z] \quad (13)$$

斜入射于无限长压电圆柱薄壳上, 则无限介质中的波动方程

$$(\nabla^2 + k^2)p = 0, \quad (14)$$

的解可写成^[2]:

$$p(r, \varphi, z) = p_i(r, \varphi, z) + p_r(r, \varphi, z) - i\omega\rho \int_S G(r, a; \varphi - \varphi', z - z') \dot{w}(\varphi', z') ds', \quad (15)$$

式中 p_i 是入射声场, p_r 是刚性不动圆柱的散射场, 第三项则是由于入射声波作用下圆柱振动所产生的辐射场, ρ 是周围介质的密度, k 是波数, S 表圆柱壳体的表面, \dot{w} 是圆柱壳体的径向振速, $G(r, a, \varphi - \varphi', z - z')$ 是格林函数, 它是方程

$$(\nabla^2 + k^2)G(r, r', \varphi - \varphi', z - z') = -\frac{\delta(r - r')}{r} \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z') \quad (16)$$

在 $\text{Im}k > 0$, 除点 (r', φ', z') 外到处有限且在圆柱表面上满足 $\partial G / \partial n = 0$ 的解。

按照与文献[3]类似的方法, 可求出格林函数为:

$$G(r, a, \varphi - \varphi', z - z') = \frac{1}{4\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{H_m^{(1)}(r\sqrt{k^2 - \xi^2})}{\sqrt{k^2 - \xi^2} H_m^{(1)'}(a\sqrt{k^2 - \xi^2})} \cos m(\varphi - \varphi') \exp[i\xi(z - z')] d\xi \quad (17)$$

式中 $\epsilon_m = 1$, 当 $m = 0$; $\epsilon_m = 2$, 当 $m = 1, 2, \dots, \infty$ 时。 $H_m^{(1)}$ 是 m 阶的第一类 Hankel 函数。 $H_m^{(1)'}$ 的上标“ $'$ ”表按宗量求导。

将 (15), (17) 式代入 (10) 式我们便得到压电圆柱薄壳在平面入射声波作用下的积分微分方程组。

如果只对散射问题感兴趣, 则利用分离变量法由此方程组便可求出任意角度斜入射下的散射问题的解。为了简单起见, 我们只考虑垂直入射的情况, 此时 $\theta = 0^\circ$ 。考虑到问题的对称性可设解为:

$$\begin{aligned} \dot{u}(\varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\varphi, \\ \dot{v}(\varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\varphi, \\ \dot{w}(\varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\varphi, \end{aligned} \quad (18)$$

将入射声场按柱面波展开得到:

$$p_i(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_m(kr) \cos m\varphi \quad (19)$$

式中 $J_m(kr)$ 是 m 阶贝塞尔函数, $i = \sqrt{-1}$.

入射声场与刚性圆柱的散射场之和可写为:

$$p_i(r, \varphi) + p_r(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m \cos m\varphi, \quad (20)$$

式中

$$G_m = \epsilon_m i^m \left[J_m(kr) - \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)}(kr) \right]. \quad (21)$$

将(18)的第三式,(20)式及(21)式代入(15)式,并利用(17)式,三角函数的正交性及 δ 函数的积分表示:

$$\delta(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi z'} dz' \quad (22)$$

可求出(15)式的积分. 又(21)式在 $r = a$ 时,利用朗斯基行列式:

$$\Delta(J_m, H_m^{(1)}) = \frac{2i}{\pi ka}, \quad (23)$$

可得到:

$$G_{ma} = G \Big|_{r=a} = \frac{2\epsilon_m i^{m+1}}{\pi ka H_m^{(1)'}(ka)}, \quad (24)$$

由此得到作用在壳体表面的声压为:

$$p(a, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [G_{ma} - Z_{mm} a_m] \cos m\varphi \quad (25)$$

式中

$$Z_{mm} = i\rho c \frac{H_m^{(1)}(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} \quad (26)$$

z_{mm} 是 m 号简正波比辐射阻抗,其特性可参看文献[4], c 是周围介质的声速.

将(18)及(25)式代入(8),(9)和(10)式定出系数 a_m , b_m 和 c_m , 再把所得到的结果代入(18)和(15)式,我们得到压电圆柱的位移速度分布和介质中总声场分布的解析表示式.

振速分布:

$$\dot{u}(\varphi) = 0,$$

$$\dot{v}(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} 4i^{m+1} \frac{\left[m \left(1 - \frac{h^2}{12a^2} \right) \right] \sin m\varphi}{\pi ka \left[k_1^2 a^2 - m^2 \left(1 + \frac{h^2}{12a^2} \right) \right] [Z_m + Z_{mm}] H_m^{(1)'}(ka)}, \quad (27)$$

$$\dot{w}(\varphi) = \frac{\left(e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \right) \frac{V}{a}}{Z_0 + Z_{00}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\epsilon_m i^{m+1} \cos m\varphi}{\pi ka [Z_m + Z_{mm}] H_m^{(1)'}(ka)},$$

总声场:

$$p(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_m(kr) \cos m\varphi - \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)}(kr) \cos m\varphi$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\rho c^2}{\pi \omega a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e_m^2 i^m H_m^{(1)}(kr)}{[Z_m + Z_{mm}] [H_m^{(1)'}(ka)]^2} \cos m\varphi \\
 & - \frac{i\rho c \left(e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \right) V}{a [Z_0 + Z_{00}] H_0^{(1)'}(ka)} H_0^{(1)}(kr), \tag{28}
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 Z_m & = \frac{iY^E h}{\omega a^2} \left\{ \left[\frac{m^2 \left(1 - \frac{h^2}{12a^2} \right) \left(1 + \frac{h^2}{12a^2} m^2 \right)}{k_1^2 a^2 - m^2 \left(1 + \frac{h^2}{12a^2} \right)} \right] + \left(1 - k_1^2 a^2 + \frac{h^2}{12a^2} m^4 \right) \right\}, \\
 & m = 0, 1, 2, \dots, \infty, \tag{29} \\
 Y^E & = \left(c_{11}^E - \frac{c_{13}^E{}^2}{c_{33}^E} \right), \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad c_1^2 = \frac{Y^E}{\rho_1}.
 \end{aligned}$$

由此可见，径向振速分布 $\dot{w}(\varphi)$ 和总声场 $p(r, \varphi)$ 的表示式中的第零号简正波比普通纯弹性圆柱多一个与压电效应有关的项。当把内外电极短路时，则这一项消失，于是便过渡到与普通纯弹性圆柱相同的形式^[5]。

上述简正波级数表示式当 ka 很大时收敛很慢，因此在研究高频散射时，可以利用 Watson 变换将上述简正波级数化为留数级数的形式。这时我们可得到收敛很快的级数，甚至一两项就足够了，限于篇幅，拟当另文阐述。

以上我们求解了无限长压电圆柱对平面正入射声波的散射问题。显然上述数学方法也适用于有限长压电圆柱的声散射问题，不过此时问题的物理模型相当于在压电圆柱两端接上同样半径的半无限长刚性圆柱，即使对于这种“理想化”的模型，我们也会遇到压电圆柱的振动模式通过周围介质而引起振动模式之间的耦合问题，从而使问题变得非常复杂和烦琐，但原则上总是可以得到问题的形式解的。

四、压电圆柱的传递函数和瞬态响应

将(27)式代入(12)式，再将所得结果代入(11)式积分，最后令 $I = 0$ ，我们便得到压电圆柱作为声接收器的开路自由声场灵敏度响应，即传递函数的解析表示式：

$$H(\omega) = \frac{-a \left(e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \right) D}{\left(e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \right)^2 - i\omega \frac{a^2}{h} \left(e_{33}^S + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E} \right) (Z_0 + Z_{00})}, \tag{30}$$

式中

$$D = \left[\frac{2i}{\pi k a H_0^{(1)'}(ka)} \right] \tag{31}$$

是圆柱作为声接收器的绕射系数，它是一个复数，如下面将要看到的，绕射系数 D 对传递函数有重要影响。

从(30)式可以看出,绕射系数的作用相当于一个滤波器。下面我们进行一些数值计算并对结果进行初步的分析讨论。

首先计算压电圆柱接收器的传递函数,计算所用的压电材料是 PZT-5 压电陶瓷,材料参数取自文献[6],周围介质是水,压电圆柱的半径 $a = 15 \times 10^{-3}m$,壁厚分别等于 $1.5 \times 10^{-3}m$ 和 $3.0 \times 10^{-3}m$ 两种。将上述数据代入(30)式算出的传递函数的振幅谱和相位谱分别如图 1 和图 2 所示,实线和虚线分别是厚度为 $1.5 \times 10^{-3}m$ 和 $3.0 \times 10^{-3}m$ 的圆柱的传递函数。为了方便图中的横坐标用 ka , k 是周围介质中的圆波数, a 是圆柱半径。图 3 的实线和虚线分别是传递函数的实部和虚部。它们相应于壁厚 $h = 1.5 \times 10^{-3}m$ 的圆柱的情况。

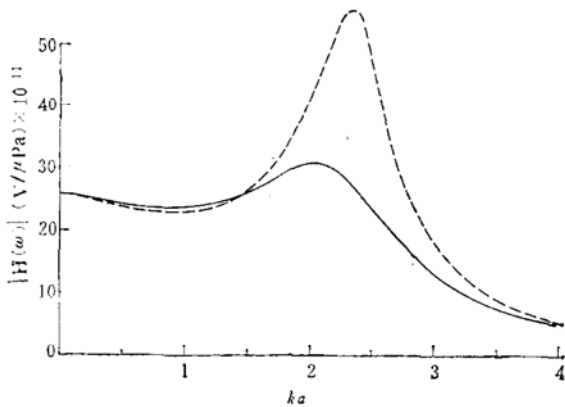


图 1 压电圆柱传递函数的振幅谱
Amplitude Spectrum of transfer function of piezoelectric cylinder

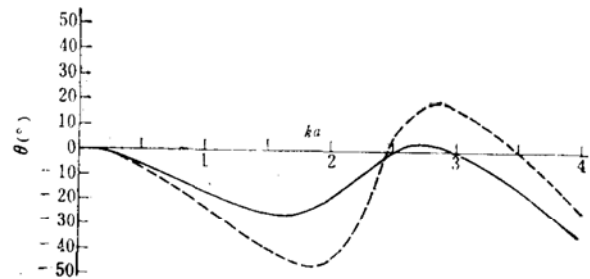


图 2 压电圆柱传递函数的相位谱
Phase spectrum of transfer function of piezoelectric cylinder

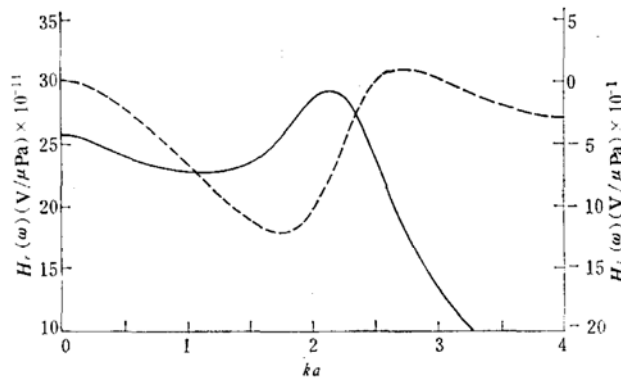


图 3 压电圆柱传递函数的实部和虚部
Real and imaginary parts of transfer function of piezoelectric cylinder

由(31)式算出绕射系数的振幅谱和相位谱分别如图 4 和图 5 所示。为了更清楚地看出绕射系数对传递函数的影响,将(30)式中的 D 用 1 代替后计算其振幅谱和相位谱分别如图 6 和图 7 所示。它们同一个自由度的简谐振子的振速的振幅谱和相位谱很相似,这是应当预料到的。因为尽管在声波的作用下,圆柱表面有不均匀的振速分布,但输出电流却是通过在电极上对电流分布积分得到的,积分的作用相当于平均,由于 φ 方向的所有的高阶模所对应的输出电流在平均时都正负抵消了,平均后只剩下与零阶模对应的电流才有贡献,所以我们得到的传递

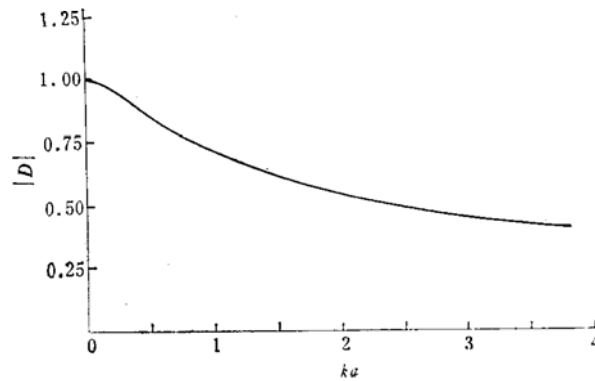
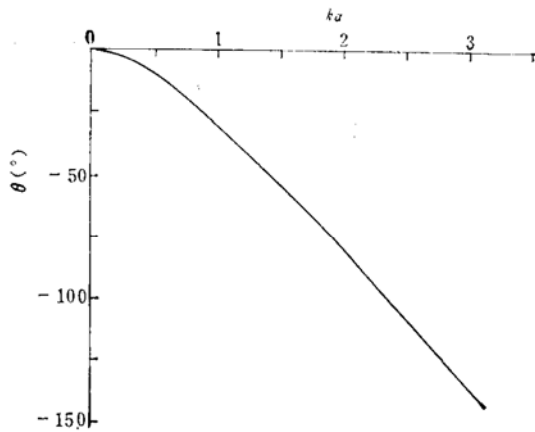
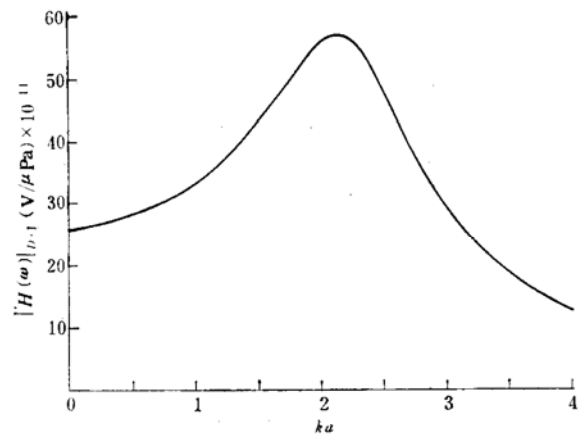


图 4 绕射系数的振幅谱

Amplitude spectrum of diffraction coefficient

图 5 绕射系数的
相位谱Phase spectrum of diffraction
coefficient图 6 压电圆柱的传递函数在 $D = 1$,
 $h = 1.5 \times 10^{-3} \text{m}$ 情况下的振幅谱Amplitude spectrum of transfer function
of piezoelectric cylinder when $D = 1$,
 $h = 1.5 \times 10^{-3} \text{m}$

函数只与零阶模有关。当令绕射系数 $D = 1$ 时计算出的振幅谱和相位谱便具有与简谐振子相似的行为。

比较图 1 和图 6, 图 2 和图 7 可以看到, 绕射系数的影响是相当大的, 特别是对相位谱的影响尤其明显。此外, 仔细比较图 1 和图 6, 可以看出, 由于绕射系数的影响, 两个图中的相应的振幅谱的峰值所对应的频率是不同的, 这点常常被人们所疏忽。

由传递函数的解析表达式 (30) 利用 FFT 所算出的脉冲响应如图 8(a) 所示。从傅里叶变换的渐近关系有^[7]:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_s(t) = -i \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\omega H(\omega)], \quad (32)$$

式中 $h_s(t)$ 和 $H(\omega)$ 分别是压电圆柱接收器的脉冲响应和传递函数, ω 是圆频率。

利用圆柱函数高频渐近展开式容易证明 $H(\omega)$ 的高频渐近特性为:

$$|H(\omega)| \sim \omega^{-\frac{3}{2}}$$

代入(32)式我们得到:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_{\delta}(t) = 0. \tag{33}$$

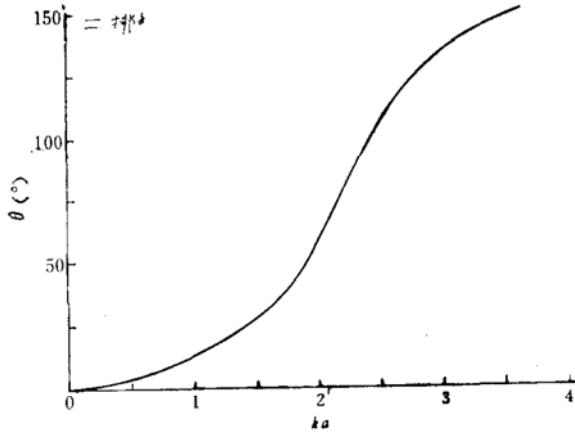
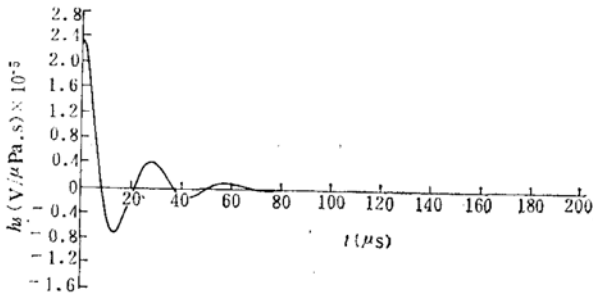


图 7 压电圆柱的传递函数在 $D=1, h = 1.5 \times 10^{-3}m$ 的情况下的相位谱

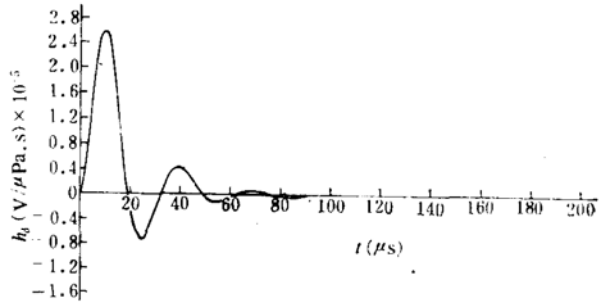
Phase spectrum of transfer function of piezoelectric cylinder when $D = 1, h = 1.5 \times 10^{-3}m$

即脉冲响应的初始值应为零。而图 8(a) 所示的脉冲响应的初始值并不为零，这表明图 8(a) 中的脉冲响应的时间起点超前了。这是不难理解的，因为在公式(30)的推导中我们利用了自由声场灵敏度的标准定义。在这种定义中声输入端是在接收器的声中心，对于圆柱形接收器来说声中心就是圆柱轴。因此当利用(30)式的传递函数来求脉冲响应时我们便自然得到图 8(a) 所示的时间起点超前了的脉冲响应。实际上脉冲响应的时间起点应当处于平面入射声波波前与圆柱形接收器的表面相切的那一时刻。利用傅里叶变换的时移定理有：

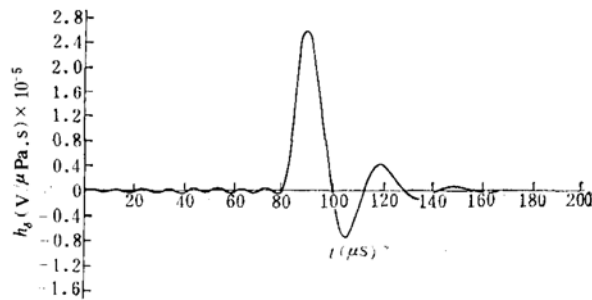
$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{\delta}(t - t_0) e^{i\omega t} dt = e^{i\omega t_0} H(\omega) \tag{34}$$



(a)



(b)



(c)

(a) 时移 (time shift) $t_0 = 0$ (b) 时移 (time shift) $t_0 = -10.4338\mu s$ (c). 时移 (time shift) $t_0 = -90.4338\mu s$

图 8 压电圆柱的脉冲响应

Impulse response of piezoelectric cylinder

即脉冲响应 $h_{\delta}(t)$ 的时移 t_0 等效于传递函数 $H(\omega)$ 乘上一个相位因子 $e^{i\omega t_0}$ ，令 $t_0 = -\frac{a}{c}$ ，此处 a 是圆柱的半径， c 是周围介质的声速，对于 $a = 1.5 \times 10^2m, c = 1450m/s$ ，代入(34)式右

端进行 FFT 便得到图 8(b) 所示的脉冲响应。由此可见时间起点确实是在圆柱壳表面上。

为了进一步验证接收器是否满足因果律, 令 $t_0 = -90.4338 \mu\text{s}$ 代入(34)式右端进行 FFT 所得到的脉冲响应如图 8(c) 所示, 即系统的确实满足因果律。

图 9 是从(30)和(34)式出发利用 FFT 卷积得到的接收器的阶跃响应。由图 9 可见, 当时间较大时, 阶跃响应的值趋于

$$25.93 \times 10^{-11} \text{V}/\mu\text{Pa},$$

这正好是传递函数在零频率的值, 这可利用傅里叶变换的矩定理得到解释。

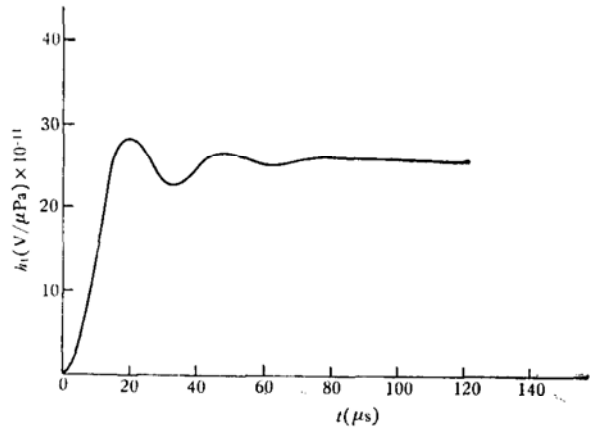


图 9 压电圆柱的阶跃响应
Step response of piezoelectric cylinder

五、相位重现

从前面的理论计算可以看出, 换能器的传递函数或脉冲响应的严格计算一般说来是比较复杂的, 有时甚至是很困难的。特别是对于形状较复杂的实际换能器结构, 即使利用数值方法, 由于计算机存贮容量的限制也很难算出完整的传递函数的谱和脉冲响应。因此如何从实验研究来得到换能器的传递函数便显得十分重要了。

近年来, 随着计算机的广泛应用和数字信号处理的蓬勃发展, 国内外都开展了换能器的复数灵敏度的校准工作。在频域校准中需要有极其精密的距离调节装置^[8]。文献[9]提出了消除距离影响的时域校准方法, 在这种方法中要求设备有较高的采样频率和足够的信号带宽。这些要求在实际上都不同程度地使复数灵敏度的校准工作受到了限制。另一方面, 如果已知换能器满足最小相位条件, 则它的传递函数(即复数灵敏度)的相位谱便可利用希尔伯特变换从它的传递函数的振幅谱的测量值重现出来, 而传递函数的振幅谱的测量则是十分简便的。

从函数论知, 对于线性非时变的因果性系统, 其传递函数的实部和虚部满足希尔伯特变换。如果系统同时还是最小相位系统, 则其传递函数的相位谱可以从它的振幅谱唯一地确定^[10]。

显然, 本文所研究的圆柱形压电接收器是属于线性非时变的因果性系统。因此其传递函数的实部和虚部满足希尔伯特变换。一般说来, 要想从它的传递函数的解析表达式直接分析论证其是否属于最小相位系统是比较困难的。但从图 8(b) 的脉冲响应曲线来判断却比较容易, 如果将此曲线视为一个信号的话, 则由于它的能量分布是随时间逐渐减小的, 因此是典型的最小相位信号, 而相应的系统则是最小相位系统^[11]。对于这种系统, 其传递函数的相位谱可以从它的振幅谱利用下述希尔伯特变换唯一地确定^[12]:

$$\theta(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dA(x)}{dx} \ln \coth \frac{|x|}{2} dx \quad (35)$$

式中 $\theta(\omega)$ 是传递函数的相位谱, $A(\omega)$ 是传递函数的对数振幅谱, $x = \ln \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)$ 。

将圆柱形接收器的传递函数(30)式的振幅取对数后代入(35)式进行数值积分便可得到相位谱。在本文中为了避免(35)式的奇异积分所带来的麻烦,我们利用波特(H. W. Bode)在反馈放大器设计中所提出的“半无限恒定斜率振幅谱”的方法进行相位重现。这种方法十分简便,利用查表和简单的四则运算很快便可求出相位谱。关于此方法的原理和计算步骤详见文献[13]。

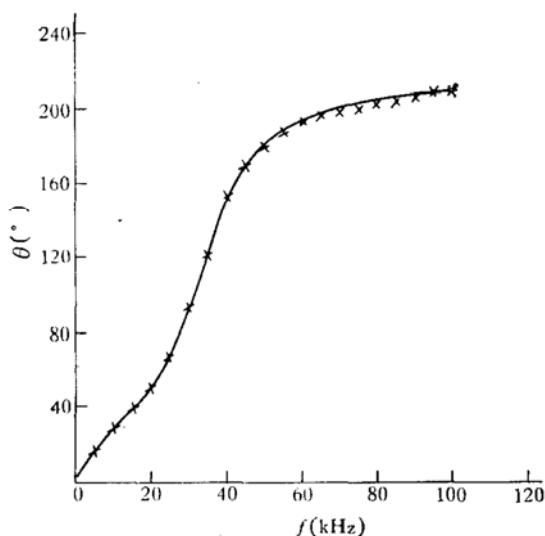


图 10 压电圆柱的传递函数的相位谱
Phase spectrum of transfer function of piezoelectric cylinder

图 10 的叉点是利用文献[13]的方法从半径和厚度分别为 $15 \times 10^{-3}\text{m}$ 和 $1.5 \times 10^{-3}\text{m}$ 的圆柱形接收器的传递函数的振幅谱重现出来的相位谱,图中实线则是利用(30)式的传递函数将时间起点从圆柱轴移到圆柱表面所计算出来的相位谱,二者符合得非常好。图 10 中的相位谱与图 2 中的相位谱的差别是由于时间起点的移动造成的。

六、结 论

1. 本文所提出的压电圆柱的薄壳理论是对通常的薄膜理论的进一步发展,用这种理论来处理散射问题是比较适宜的。显然它也可用来处理有限长压电圆柱的振动和辐射散射问题。

2. 与通常纯弹性圆柱的声散射所不同的是压电圆柱的散射总场中包含了与压电效应有关的一项,当把内外电极短路时,则这一项消失,于是总场便过渡到与通常纯弹性圆柱相同的形式。

3. 从散射问题的解,得到了压电圆柱作为声接收器的传递函数的解析表达式,且传递函数只与零阶模式有关。数值计算表明,绕射系数的振幅谱和相位谱对传递函数有重要的影响,使共振频率略有移动。

4. 从传递函数的 FFT 得到的脉冲响应表明,压电圆柱接收器属于最小相位系统,因此它的传递函数的相位谱可以利用希尔伯特变换从它的振幅谱重现出来。且重现出来的相位谱与从传递函数的解析表达式直接计算的相位谱满意地符合。由此推论,若已知换能器满足最小相位条件,则我们便可以从它的传递函数的振幅谱的测量值重现出它的相位谱。考虑到相位谱实际测量的种种困难,而振幅谱的测量十分简便,因此相位谱的重现具有很重要的实际意义。

参 考 文 献

- [1] Wang, C. T., *Applied Elasticity* (McGraw-Hill, New York, 1953), 310.
- [2] Foldy, L. L., "A General Theory of Passive Linear Electroacoustic Transducers and the Electroacoustic Reciprocity Theorem I", *J. Acoust. Soc. Am.*, 17(1945), 109.

- [3] Papas, C. H., "Radiation from a Transverse Slot in an Infinite Cylinder", *J. Math. Phys.*, **28**(1949), 227.
- [4] Junger, M. C., "Radiation Loading of Cylindrical and Spherical Surfaces", *J. Acoust. Soc. Am.*, **24** (1952), 288.
- [5] Liamshev, L. M., "Sound Diffraction on an Infinite Thin Elastic Cylindrical Shell", *Akust. Zh.*, **4** (1958), 161.
- [6] Mason, W. P. *Physical Acoustics*, I-Part A (Academic Press, 1964), 202.
- [7] Morse, P. M. and Feshbach, H., *Method of Theoretical Physics*, Part 1 (McGraw-Hill, New York, 1953), 462.
- [8] Luker, L. D. and Van Buren, A. L., "Phase Calibration of Hydrophones", *J. Acoust. Soc. Am.*, **70**(1981), 516.
- [9] 朱厚卿, "电声换能器复数灵敏度的宽带信号校准方法", 第三届全国声学学术会议论文摘要, 1982年6月上海, 495.
- [10] Papoulis, A., *The Fourier Integral and Its Applications*, (McGraw-Hill, New York, 1962), 192.
- [11] Ronbinson, E. A. and Treitel, S., *Geophysical Signal Analysis* (Prentice-Hall, 1980), 172.
- [12] Bode, H. W., *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, (D. Van Nostrand, New York, 1945), 313.
- [13] Thomas, D. E., "Tables of Phase Associated with a Semi-Infinite Unit Slope of Attenuation", *Bell Syst. Tech. J.*, **26**(1947), 870.

SCATTERING OF PLANE WAVE BY PIEZOELECTRIC CYLINDER —TRANSFER FUNCTION, TRANSIENT RESPONSES AND PHASE RECONSTRUCTION OF TRANSDUCER

REN SHU-CHU

(*Institute of Acoustics, Academia Sinica*)

Received March 5, 1983

ABSTRACT

In this paper, under Kirchoff's assumptions, a theory of the thin shell of radially-polarized piezoelectric ceramic cylinder has been developed. Using the methods of the Green's function and separation of variables the scattering of a plane wave by the cylinder has been solved. The normal mode series expressions of the velocity distribution of the surface of the cylinder and of the total sound field have been obtained and from those an exact analytical expression of the transfer function of the cylinder as a sound receiver has been given. Arbitrary transient response of the cylinder can be calculated from the transfer function by using FFT.

For PZT-5 piezoelectric ceramic cylinder, the transfer function, impulse response and step response have been calculated. The results show that the impulse response appears a typical minimum phase behaviour and so the cylindrical piezoelectric receiver belongs to the minimum phase system. Therefore, the phase spectrum of transfer function of the receiver can be reconstructed from its amplitude spectrum by using the Hilbert transform. The phase spectrum obtained by such a method is in good agreement with that calculated from the analytical expression of transfer function directly.

Obviously, it can be deduced that if a transducer has the minimum phase property then the phase spectrum of its transfer function can be reconstructed from the measured values of the amplitude spectrum by using the Hilbert transform.

The phase reconstruction of transducer is of importance in engineering applications, especially because of various difficulties of the phase measurement.