

## 加载音叉的频率计算

杨秉章 穆道成

(湖南大学)

1982年8月16日收到

### 摘 要

为了深入了解音叉的频率变化,达到精确地调节频率的目的,本文特对加载音叉进行频率计算:推导出频率方程,并用电子计算机算出简正振动的前三个分音频率,绘出频率随质量位置变化的特性曲线。在本文中发现同一质量放在音叉臂的不同位置,各个基频与质量到叉的距离关系是一递减曲线。而所有的各高次分频都出现峰频点(最高频率点)和谷频点(最低频率点),是一随质量位置高低交错变化的频率曲线。当音叉臂所放的质量不同时,所有同次分频的各峰频点,几乎都具有该次分频的极限频率,而集中质量的大小对它的影响不大。

### 一、引 言

音叉和石英晶体是实验仪器中典型的标准振源,国际上常用以校正其它电子仪器的频率。均匀对称没有任何负载的音叉振动,在很早以前就已由瑞利(Lord Rayleigh)进行推证得到解决,它的简正振动方程是<sup>[1]</sup>:

$$y = \text{ch}k_n x - \cos k_n x - \frac{\cos k_n l + \text{ch}k_n l}{\sin k_n l + \text{sh}k_n l} (\text{sh}k_n x - \sin k_n x) \quad (1a)$$

式中  $k_n$  是与自然数  $n$  有关的参量,  $l$  是音叉臂的振动长度。它的频率方程是:

$$\cos k_n l \text{ch}k_n l + 1 = 0 \quad (1b)$$

在音叉两臂的末端,如果对称地载有相同的集中质量,则这音叉的简正振动也可由下列方程决定,这方程是<sup>[2]</sup>

$$y = \cos k_n x - \text{ch}k_n x + \frac{(\sin k_n l - \text{sh}k_n l) + \alpha k_n l (\cos k_n l - \text{ch}k_n l)}{(\text{ch}k_n l + \cos k_n l) - \alpha k_n l (\sin k_n l - \text{sh}k_n l)} (\sin k_n x - \text{sh}k_n x) \quad (2a)$$

式中  $\alpha = m/\rho_0 A l$

$m$  为末端所载集中质量。

$\rho_0$ 、 $A$ 、 $l$  分别为音叉臂的体密度、断面面积和音叉臂的长度

它的频率方程是:

$$1 + \frac{1}{\text{ch}k_n l \cos k_n l} - \alpha k_n l (\tan k_n l - \text{th}k_n l) = 0 \quad (2b)$$

本文讨论的是在两匀质音叉臂的任意对称位置,放有相同的微小集中质量的加载音叉,研

究它的简正振动和它的声频频谱。由于加载音叉中的集中质量在不同的位置有不同的频谱，因此变更集中质量的位置，可以达到精密地调节频率的目的。

## 二、加载音叉振动的微分方程

密度均匀、断面恒定、两臂长度相等的矩形断面音叉，在音叉臂的任意对称位置 ( $x_i$ )，固定有相同的集中质量  $m$  (如图 1)，则这质量把音叉臂分为两段，在适当的外力冲击后，按其边界条件和连接条件，两臂对称地作特有的简正振动。任意一微小振元的振动可以写成

$$IE \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \rho A(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

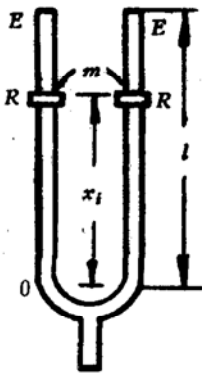


图 1 加载音叉

A loaded tuning fork

由于音叉臂上有集中质量，密度就不均匀。

$$\rho A(x) = \rho_0 A + m \delta(x - x_i) \quad (4)$$

式中  $IE$  为音叉臂的刚度， $m \delta(x - x_i)$  为集中密度。

令

$$\xi = y(x) e^{i p_n t} \quad (5)$$

$p_n$  为  $n$  级的圆频率。根据杆的弯曲振动理论：

$$a^2 = \frac{p_n^2}{k_n^4} = \frac{IE}{\rho_0 A} = \text{const} \quad (6)$$

将 (5) 式代入 (3) 式，并用 (4) 式，(6) 式关系表示，得

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - k_n^4 y = \frac{m \delta(x - x_i)}{IE} p_n^2 y \quad (7)$$

很明显在  $OR$  段

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} = k_n^4 y_1 \quad (0 \leq x < x_i) \quad (8)$$

在  $RE$  段

$$\frac{d^4 y_2}{dx^4} = k_n^4 y_2 \quad (x_i < x \leq l) \quad (9)$$

当音叉振动传播到端点时，受到固定端和自由端的约束，其边界条件是：

在固定端

$$\xi(0, t) = 0 \quad (10)$$

和

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (11)$$

在自由端

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(l, t) = 0 \quad (12)$$

和

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}(l, t) = 0 \quad (13)$$

当振动传播到  $x_i$  处时, 因该处有集中质量, 受到连接处集中质量的约束, 根据理论分析其连接条件是: 公式 (14)–(17)

$$y_1|_{x=x_i-0} = y_2|_{x=x_i+0} \quad (14)$$

$$\frac{dy_1}{dx}|_{x=x_i-0} = \frac{dy_2}{dx}|_{x=x_i+0} \quad (15)$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2}|_{x=x_i-0} = \frac{d^2 y_2}{dx^2}|_{x=x_i+0} \quad (16)$$

$$\frac{d^3 y_2}{dx^3}|_{x=x_i+0} - \frac{d^3 y_1}{dx^3}|_{x=x_i-0} = \frac{ml}{\rho_0 Al} k_n^4 y_{1i} = \alpha k_n^4 l y_{1i} \quad (17)$$

### 三、加载音叉的振型方程

结合边界条件 (10), (11), 解方程 (8) 得

$$y_1 = c_1(\text{ch}k_n x - \cos k_n x) + c_2(\text{sh}k_n x - \sin k_n x) \quad (0 \leq x < x_i) \quad (18)$$

结合边界条件 (12), (13), 解方程 (9), 并以  $y = f(l - x)$  表示, 得

$$y_2 = c_3[\text{ch}k_n(l - x) + \cos k_n(l - x)] + c_4[\text{sh}k_n(l - x) + \sin k_n(l - x)] \quad (x_i < x \leq l) \quad (19)$$

再用连接条件方程 (14)–(17) 的关系把它代入 (18), (19) 式中得出

$$c_1[\text{ch}k_n x_i - \cos k_n x_i] + c_2(\text{sh}k_n x_i - \sin k_n x_i) - c_3[\text{ch}k_n(l - x_i) + \cos k_n(l - x_i)] - c_4[\text{sh}k_n(l - x_i) + \sin k_n(l - x_i)] = 0 \quad (20)$$

$$c_1(\text{sh}k_n x_i + \sin k_n x_i) + c_2(\text{ch}k_n x_i - \cos k_n x_i) + c_3[\text{sh}k_n(l - x_i) - \sin k_n(l - x_i)] + c_4[\text{ch}k_n(l - x_i) + \cos k_n(l - x_i)] = 0 \quad (21)$$

$$c_1(\text{ch}k_n x_i + \cos k_n x_i) + c_2(\text{sh}k_n x_i + \sin k_n x_i) - c_3[\text{ch}k_n(l - x_i) - \cos k_n(l - x_i)] - c_4[\text{sh}k_n(l - x_i) - \sin k_n(l - x_i)] = 0 \quad (22)$$

$$c_1[(\text{sh}k_n x_i - \sin k_n x_i) + \alpha k_n l (\text{ch}k_n x_i - \cos k_n x_i)] + c_2[(\text{ch}k_n x_i + \cos k_n x_i) + \alpha k_n l (\text{sh}k_n x_i - \sin k_n x_i)] + c_3[\text{sh}k_n(l - x_i) + \sin k_n(l - x_i)] + c_4[\text{ch}k_n(l - x_i) - \cos k_n(l - x_i)] = 0 \quad (23)$$

从这些方程式可解出各系数。

### 四、加载音叉的频率方程及声频频谱

#### 1. 频率方程

由于 (20), (21), (22), (23) 四式是线性齐次代数方程, 根据数学理论, 它具有非零解的充要条件是:



表 2 第二分音频率  $k_2 l$ 

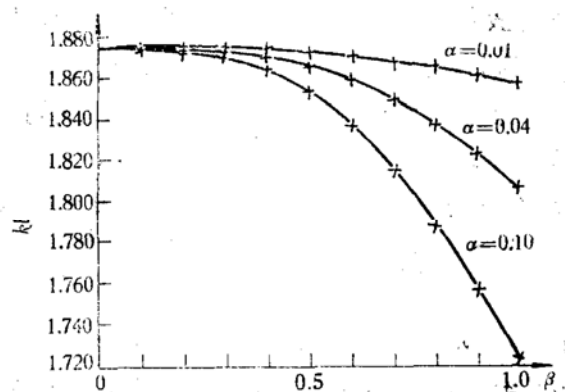
$\beta = \frac{x_i}{l}$	$\alpha$					
	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
1.0	4.649724	4.610009	4.542009	4.486033	4.439216	4.399525
0.9	4.681681	4.670110	4.649213	4.630833	4.614566	4.600046
0.8	4.693857	4.693654	4.693240	4.692859	4.692506	4.692177
0.7	4.689428	4.684908	4.676216	4.667977	4.660146	4.652708
0.6	4.678041	4.662468	4.632689	4.604651	4.578189	4.553172
0.5	4.670568	4.647802	4.604408	4.563594	4.525147	4.488867
0.4	4.672424	4.651252	4.610350	4.571256	4.533870	4.498108
0.3	4.681149	4.668306	4.642941	4.617991	4.593488	4.569432
0.2	4.689842	4.685565	4.677031	4.668456	4.659870	4.651265
0.1	4.693686	4.693293	4.692478	4.691659	4.690852	4.690045

表 3 第三分音频率  $k_3 l$ 

$\beta = \frac{x_i}{l}$	$\alpha$					
	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
1.0	7.782672	7.721757	7.625113	7.552392	7.495972	7.451057
0.9	7.850822	7.847193	7.840718	7.835115	7.830220	7.825905
0.8	7.842719	7.831086	7.808972	7.788290	7.768922	7.750764
0.7	7.821659	7.790181	7.731678	7.678488	7.629960	7.585534
0.6	7.837571	7.821233	7.790878	7.763290	7.738130	7.715106
0.5	7.854728	7.854699	7.854645	7.854594	7.854547	7.854504
0.4	7.833590	7.813487	7.776198	7.742388	7.711626	7.683543
0.3	7.810874	7.768987	7.690776	7.619308	7.553846	7.493746
0.2	7.826144	7.797731	7.741610	7.686586	7.632810	7.580395
0.1	7.850658	7.846530	7.838189	7.829737	7.821171	7.812494

## 五、结 束 语

1. 从表 1 中可以看出, 对一固定音叉, 就基频而言, 同一质量放在离固定端越远时, 其简

图 2  $k_1 l - \beta$  特性曲线

Characteristic curve

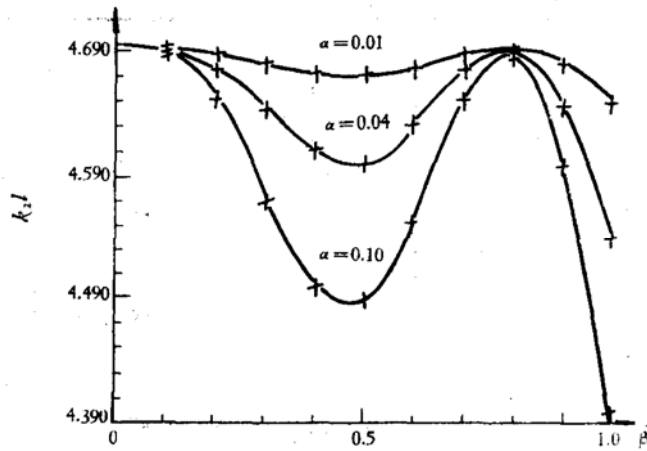


图3  $k_2l-\beta$  特性曲线  
Characteristic curve

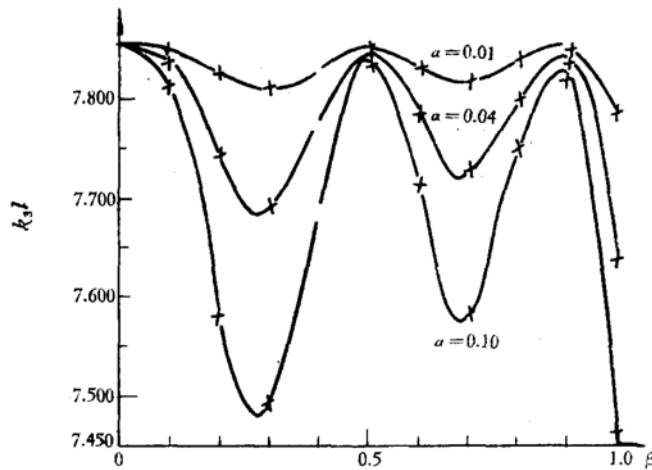


图4  $k_3l-\beta$  特性曲线  
Characteristic curve

正频率越小。当质量趋近于固定端时，其频率变化不大，且趋近于  $\alpha = 0$  时的极限频率  $k_{10}l (=1.875104)$ 。同一位置放着不同的集中质量时，质量比  $\alpha$  大的，其简正频率小

2. 对于分音频率来说，在同一位置，其简正频率随所载质量比的增加而减小。但对同一质量比而言，不能得出“其简正分音频率与质量所放位置的远近成简单关系”的结论（见表2、表3）。总的说来，质量靠近音叉末端比靠近固定端的频率要小，但在中间范围有突变区，例如在第二分音频率中， $\beta = 0.5$  附近，有一谷频点，在  $\beta = 0.6-0.8$  的范围，频率变大， $\beta = 0.8$  附近，有一峰频点，其频率趋近于  $\alpha = 0$  时的第二分音频率  $k_{20}l (=4.6941)$ 。且与所放负载的质量比无多大关系，见(图3)。

在第三分音频率中，频率有两个增大区 ( $\alpha = 0.4-0.5; 0.8-0.9$ )，两个谷频点 (0.3 附近，0.7 附近) 和两个峰频点 (0.5 附近，0.9 附近)。各峰频点的极限频率都趋近于  $\alpha = 0$  时的二次分音频率  $k_{30}l (=7.8547)$ ，质量比的大小对频率的影响也不大，见(图4)。

3. 由于加载音叉对不同附加质量和不同位置有不同的声谱。因此，它既是正弦形振源，又

是很精密的频率调节仪器。近年来用石英材料制成的短小音叉,已广泛地应用在精密仪表中,因此音叉频率已不局限于低频方面。早有报道,石英的本征频率可精确到  $10^{-8}$  以上<sup>[3]</sup>,如果在石英音叉上采用附加质量(用蒸发镀膜再进行(点)电镀)法进行频率调节,很可能将石英音叉技术向前推进一步。

由于加载音叉的机械阻抗大,只有外界的讯号频率与它的简正频率一致,才能引起较大的振动(共振)。所以加载音叉又是对不同频率的精密滤波器。

本文承陈在康同志大力协助,用电子计算机算出数据,谨致谢意。

### 参 考 文 献

- [1] Rayleigh, "Theory of Sound", (Macmillan & Co. London, 1945), 272—281.
- [2] Albers, Y. M., "Acoustical Society of America Suggested Experiments for Laboratory Course in Acoustics and Vibrations", (The Pennsylvania State University Press, University Park and London, 1972), 58—67.
- [3] Richardson, E. G., *Technical Aspects of Sound*, 1(1953), 23—25.
- [4] Morse, M., "Vibration and Sound", (Mcgraw-Hill Book Company Inc., New York, 1948), 152—166.
- [5] Thomson, W. T., "The Effect of Rotatory and Lateral Inertia on Flexural Vibration of Prismatic Bars", *J. Acoust. Soc. Amer.*, 11(1939), 198—204.

## THE FREQUENCY CALCULATION FOR A LOADED TUNING FORK

YANG BING-ZHANG MU DAO-CHENG

(Hunan University)

Received August 16, 1982

### ABSTRACT

The frequency is calculated of a loaded tuning fork so as to acquire a deep understanding of its frequency variation and be able to control the frequency accurately. The frequency equation for the loaded tuning fork is derived and the first three partials of the normal vibration are calculated. The characteristic curves showing the variation of the frequency with the position of the concentrated mass is also given.

It is found that as the position of the concentrated mass varies, the fundamental frequency is a decreasing function of its distance from the boution of the fork while the frequencies of overtones fluctuate with the position, in which some maxima and minima appear. It is also indicated that when different concentrated masses are put on the tuning fork, all the maxima of the overtones of the same order almost approach to the limit frequency of that order and are hardly affected by the magnitude of the mass.