

# 无误差阵列协方差矩阵分离的阵列自校正方法\*

张光普<sup>1,2,3</sup> 刘恺忻<sup>1,2,3</sup> 付 进<sup>1,2,3</sup> 王晋晋<sup>1,2,3†</sup>

(1 哈尔滨工程大学 水声技术重点实验室 哈尔滨 150001)

(2 工业和信息化部 海洋信息获取与安全工信部重点实验室(哈尔滨工程大学) 哈尔滨 150001)

(3 哈尔滨工程大学 水声工程学院 哈尔滨 150001)

2022 年 12 月 5 日收到

2023 年 3 月 2 日定稿

**摘要** 针对高分辨方位估计方法受阵列幅度相位影响导致性能退化的问题,提出一种无误差阵列协方差矩阵分离的阵列自校正方法。该方法利用协方差矩阵重构方法获取近似无误差阵列的协方差矩阵,以弱化协方差矩阵中的阵列误差,并利用特征结构配置方法求解幅度和相位误差。迭代上述重构方法和特征结构配置方法,实现从未校正阵列的协方差矩阵中分离出无误差阵列的协方差矩阵和幅度相位误差矩阵。仿真结果表明,该方法准确地估计阵列误差,利用重构协方差矩阵进行方位估计能够提高方位估计精度和分辨力。湖试试验结果表明,经阵列校正后,空间中方位角度邻近的声源和干扰目标可被分辨。

**关键词** 阵列自校正,波达方向估计,协方差矩阵,特征结构

**PACS 数** 43.30, 43.60

**DOI:** 10.12395/0371-0025.2022166

## Array self-calibration method based on covariance matrix separation of error-free array

ZHANG Guangpu<sup>1,2,3</sup> LIU Kaixin<sup>1,2,3</sup> FU Jin<sup>1,2,3</sup> WANG Jinjin<sup>1,2,3†</sup>

(1 *National Key Laboratory of Underwater Acoustic Technology, Harbin Engineering University* Harbin 150001)

(2 *Key Laboratory of Marine Information Acquisition and Security (Harbin Engineering University), Ministry of Industry and Information Technology* Harbin 150001)

(3 *College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University* Harbin 150001)

Received Dec. 5, 2022

Revised Mar. 2, 2023

**Abstract** Because the array amplitude and phase errors will degrade the performance of the high-resolution direction of arrival (DOA) estimation method, an array self-calibration method based on the covariance matrix separation of the error-free array is proposed. This method applies the covariance matrix reconstruction method to obtain the covariance matrix of an approximate error-free array, which weakens the array error in the covariance matrix. Then, the eigenstructure method is used to solve the amplitude and phase errors. The above reconstruction method and eigenstructure method are iterated to separate the error-free array covariance matrix and the amplitude-phase error matrix from the covariance matrix of the uncalibrated array. Simulation results show that the proposed method can accurately estimate the array errors, and using the reconstructed covariance matrix for DOA estimation can improve the resolution and estimation accuracy. The lake experiment results show that the sound source and interference target with adjacent azimuth angles can be distinguished after calibrating the array using the proposed method.

**Keywords** Array self-calibration, Direction of arrival estimation, Covariance matrix, Eigenstructure

## 引言

波达方向 (DOA) 估计是水声阵列信号处理的重

要研究内容之一,它的主要功能是从噪声和干扰背景中获取感兴趣目标的方位信息<sup>[1-3]</sup>。最具有代表性的波达方位估计的方法是常规波束形成<sup>[4]</sup>方法,该方法的优势在于算法稳健性高,性能受阵列误差影

\* 国防基础科研项目 (JCKY2019604B001) 和国家自然科学基金项目 (61801138) 资助

† 通讯作者: 王晋晋, wangjinjin@hrbeu.edu.cn

响较小。然而当阵列孔径较小时, 该方法的角度分辨率低, 难以分辨空间角度间隔较小的两个目标方位。在这种情况下通常使用高分辨方位估计方法来提高分辨力, 例如最小方差无失真响应波束形成器(Capon)<sup>[5]</sup>和多重信号分类方法(MUSIC)<sup>[6]</sup>等, 这些方法较常规波束形成方法分辨力更高, 然而 Capon 方法是自适应算法, MUSIC 方法是基于特征分解的子空间类算法, 很小的阵元偏差可能会使这两类方法的估计性能急剧下降<sup>[7]</sup>。不仅是这两类方法, 实际上多数高分辨算法的稳健性差<sup>[8-9]</sup>, 对阵列的精度要求较高。但是在实际阵列制造和安装过程中不可避免产生多种阵列误差, 例如阵元幅度相位误差、阵列位置扰动、阵元之间互相耦合等。为了解决这个问题, 学者们提出了很多阵列误差校正方法, 主要分为两大类, 第一类是有源校正算法, 第二类是自校正算法。

有源校正算法<sup>[10-15]</sup>是通过在空间中人为放置方位精确已知的校正源对阵列误差进行离线估计, 这类方法对工作环境要求较高, 在高信噪比和无干扰环境中能够准确估计阵列误差。王敏等<sup>[11]</sup>提出了一种阵列幅度相位误差的有源校正方法, 该方法利用一个校正源, 并根据子空间正交理论, 通过对误差建模求解阵列误差的最优解。张柯等<sup>[12]</sup>针对矢量阵提出了幅度相位误差和阵元位置误差的校正方法, 该方法需要至少三个方位已知的信号源, 并根据信号源的特征向量求解阵列误差, 当信噪比较高时, 该方法可以准确估计阵列误差。Song 等<sup>[14]</sup>提出了一种改进的最大似然阵列校正算法, 该方法避免了最大似然函数每次迭代中的矩阵求逆, 以较低的计算复杂度和较快的收敛速度估计阵元互耦误差、幅度相位误差和阵元位置误差。

自校正算法<sup>[16-20]</sup>将校正源方位看作未知参数, 联合求解阵列误差和信源方位。由于其良好的性能以及对校正环境更强的包容性, 该方法获得更广泛的应用和认可。Weiss 等提出特征结构配置法<sup>[16]</sup>, 利用噪声子空间和阵列流形向量之间的正交性估计阵列误差, 虽然该方法是经典的自校正方法, 但是仅适用于小的阵列扰动, 并且在低信噪比环境中难以有效地校正阵列。近年来, 针对均匀线性阵列提出了一些基于独立分量分析方法的自校正算法<sup>[17]</sup>, 然而在理论上它们要求阵元数量接近无穷大, 在仿真中当阵元数超过 30 时, 独立分量分析方法才可以有效地估计阵列误差。Liu 等<sup>[18]</sup>利用特征矩阵的联合逼近和对角化算法分离信号向量以及由阵列流形矩阵和传感器阵列误差矩阵组成的混合矩阵, 然后进行方位估计和阵列误差估计。Liu 等<sup>[20]</sup>利用特征结构

配置方法估计非线性阵列的阵列幅度相位误差, 该方法的优势在于即使相位误差很大也能获得良好性能, 但是该方法有两个缺点, 其一, 该方法至少需要两个方位差别较大的信号, 其二, 该方法至少需要  $K(K-1)+1$  个阵元才能估计  $K$  个信号方位, 且不适用于均匀直线阵。目前有很多稳健方位估计方法被提出, 这类方法在阵列有误差的情况下依然能够求解准确的目标方位, 但不能求解具体的阵列误差。由于阵列误差严重影响高分辨压缩感知 DOA 估计方法的性能, Wang 等<sup>[21]</sup>提出了基于直线阵的稳健的压缩感知 DOA 方法。另外, 当数据中包含期望信号分量时, Capon 方法会产生“自消”现象, 其性能严重退化<sup>[22]</sup>, 因此 Gu 等<sup>[23]</sup>和 Mohammadzadeh 等<sup>[24]</sup>利用协方差矩阵重构方法, 重构干扰加噪声的协方差矩阵, 去除协方差矩阵中的信号分量, 将该矩阵用于 Capon 方法可以提高算法的稳健性。

有源校正方法需要方位已知的特定校正源, 对干扰源十分敏感, 方位未知的干扰源会严重降低方法的性能, 常用于在消声水池等人工环境中校正阵列。实际工程中需在湖上或海上进行阵列校正, 真实环境的信噪比通常较低, 且有方位未知的干扰目标, 该方法难以有效校正阵列。阵列自校正方法对环境包容性更强, 但通常需要较多阵元<sup>[1]</sup>, 且当信噪比降低或阵列误差严重时该方法的阵列误差估计精度和方位估计精度会降低<sup>[16]</sup>。本文提出一种适用于均匀直线阵的幅度相位误差的阵列自校正方法, 结合协方差矩阵重构、特征结构配置和迭代方法, 从未校正阵列的协方差矩阵中分离出精确的阵列误差矩阵, 以及近似于无误差阵列协方差矩阵纯信号分量的重构协方差矩阵, 利用该重构协方差进行方位估计可准确估计目标方位。阵元个数较少、信噪比较低时, 该方法仍能有效校正阵列。

## 1 物理模型

假设  $K$  个平面波入射到一个  $M$  元的均匀直线阵上, 方位  $\theta_k$  是第  $k$  个信号的入射方向与阵列法线方向的夹角。第  $k$  个信号表示为  $\mathbf{s}_k(t)$ , 那么无误差的阵列输出信号表示为

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{s}_k(t) + \mathbf{N}(t) = \mathbf{A}(\vartheta) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t), \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{A}(\vartheta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ ,  $\mathbf{a}(\theta_k)$  是第  $k$  个信号的无误差的阵列流形向量, 具体表示为

$$\mathbf{a}(\theta_k) = [e^{j\mu_{1,\theta_k}}, \dots, e^{j\mu_{M,\theta_k}}]^T, \quad (2)$$

其中,  $\mu_{m,\theta_k} = -j\kappa(m-1)d\sin(\theta_k)$ ,  $\kappa = 2\pi/\lambda$ ,  $d$  为阵元间距,  $\lambda$  为信号波长,  $(\cdot)^T$  表示向量或矩阵的转置。 $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), \dots, s_K(t)]^T$  是  $K$  个互不相关的信号,  $\mathbf{N}(t) = [n_1(t), \dots, n_M(t)]^T$  是时空不相关性的零均值高斯白噪声, 则  $\mathbf{x}(t)$  的协方差矩阵  $\mathbf{R}_x = \mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)]$  表示为

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{A}(\vartheta)\text{diag}(\sigma_s^2)\mathbf{A}^H(\vartheta) + \text{diag}(\sigma_n^2) = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n, \quad (3)$$

其中,  $\mathbb{E}(\cdot)$  表示数学期望函数,  $(\cdot)^H$  表示向量或矩阵的共轭转置,  $\text{diag}(\mathbf{a})$  表示将向量  $\mathbf{a}$  的对角化。 $\mathbf{R}_s = \mathbf{A}(\vartheta)\text{diag}(\sigma_s^2)\mathbf{A}^H(\vartheta)$  是协方差矩阵的信号分量,  $\mathbf{R}_n$  是协方差矩阵的噪声分量,  $\sigma_s^2 = [\sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2]$  表示信号功率,  $\sigma_n^2 = [\sigma_{n1}^2, \dots, \sigma_{nM}^2]$  表示噪声功率。

假设第  $m$  个阵元的幅度误差为  $a_m$ , 相位误差为  $e^{j\eta_m}$ , 则阵列幅度相位误差矩阵表示为

$$\mathbf{T}_e = \text{diag}[a_1 e^{j\eta_1}, \dots, a_M e^{j\eta_M}]. \quad (4)$$

本文将有误差的阵列称为“未校正阵列”, 根据式 (2) 和式 (4), 未校正阵列流形向量  $\hat{\mathbf{a}}(\theta_k)$  表示为

$$\hat{\mathbf{a}}(\theta_k) = [a_1 e^{j(\eta_1 + \mu_{1,\theta_k})}, \dots, a_M e^{j(\eta_M + \mu_{M,\theta_k})}]^T = \mathbf{T}_e \mathbf{a}(\theta_k). \quad (5)$$

对于  $K$  个目标方位,  $\hat{\mathbf{A}}(\vartheta) = [\hat{\mathbf{a}}(\theta_1), \dots, \hat{\mathbf{a}}(\theta_K)] = \mathbf{T}_e \mathbf{A}(\vartheta)$ 。根据式 (1) 和式 (4), 未校正阵列的输出信号表示为

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}_e \mathbf{A}(\vartheta) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t). \quad (6)$$

$\hat{\mathbf{x}}(t)$  的协方差矩阵表示为

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \mathbf{T}_e \mathbf{A}(\vartheta) \text{diag}(\sigma_s^2) \mathbf{A}^H(\vartheta) \mathbf{T}_e^H + \mathbf{T}_e \text{diag}(\sigma_n^2) \mathbf{T}_e^H = \mathbf{T}_e \mathbf{R}_s \mathbf{T}_e^H + \mathbf{T}_e \mathbf{R}_n \mathbf{T}_e^H. \quad (7)$$

MUSIC 等高分辨方法通常受阵列误差和噪声影响较大, 利用  $\hat{\mathbf{R}}_x$  的 DOA 估计结果远差于无误差阵列  $\mathbf{R}_s$  的 DOA 估计结果。因此本文方法的目的是分离  $\hat{\mathbf{R}}_x$  中的  $\mathbf{R}_s$  和  $\mathbf{T}_e$ , 即分离无误差阵列的协方差矩阵和幅度相位误差矩阵, 并利用  $\mathbf{R}_s$  进行 DOA 估计改善 MUSIC 方法的性能。另外, 本文方法属于阵列自校正方法, 无需特定个数且方位已知的校正源, 可以在真实的海洋环境中校正阵列。

## 2 无误差阵列协方差矩阵分离的阵列自校正方法

根据式 (3),  $\mathbf{R}_s$  的第  $(m,n)$  项元素为  $\sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{j(\mu_{m,\theta_k} - \mu_{n,\theta_k})}$ , 显然,  $\mathbf{R}_s$  中平行于主对角线的元素相同, 并且关于主对角线对称的两个元素互为共轭, 因此  $\mathbf{R}_s$  是 Toeplitz 矩阵<sup>[25-26]</sup>。式 (7) 中  $\hat{\mathbf{R}}_x$  的信号分量为  $\hat{\mathbf{R}}_s = \mathbf{T}_e \mathbf{R}_s \mathbf{T}_e^H$ 。根据式 (4) 和式 (5),  $\hat{\mathbf{R}}_s$  的第  $(m,n)$  项表示为

$$\sum_{k=1}^K \sigma_k^2 a_m a_n e^{j(\eta_m - \eta_n + \mu_{m,\theta_k} - \mu_{n,\theta_k})}. \quad (8)$$

由式 (8) 可知, 虽然  $\hat{\mathbf{R}}_s$  中关于主对角线对称的两个元素互为共轭, 但是其主对角线元素不相同, 平行于主对角线的元素也不相同, 因此  $\hat{\mathbf{R}}_s$  不再是 Toeplitz 矩阵。

### 2.1 重构无误差阵列协方差矩阵

利用协方差矩阵重构方法求解无误差阵列协方差矩阵  $\mathbf{R}_s$ 。考虑协方差拟合准则<sup>[27]</sup>:

$$f(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) = \|\mathbf{X}^{-1/2}(\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X})\tilde{\mathbf{X}}^{-1/2}\|_F^2, \quad (9)$$

其中,  $\|\mathbf{A}\|_F$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的 F 范数。准则 (9) 中  $\mathbf{X}$  和  $\tilde{\mathbf{X}}$  分别是已知矩阵和待拟合矩阵, 最小化  $f(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})$  可以实现从  $\mathbf{X}$  至  $\tilde{\mathbf{X}}$  的拟合, 根据文献 [27], 最小化  $f(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})$  可以转化为

$$\min_{\tilde{\mathbf{X}}} \text{Tr}[\mathbf{X}^{-1} \tilde{\mathbf{X}}] + \text{Tr}[\tilde{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{X}], \quad (10)$$

其中,  $\text{Tr}(\mathbf{A})$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的迹,  $\min_a f(a)$  表示找到能使函数  $f(a)$  最小化的参数  $a$ 。

本文方法利用  $\hat{\mathbf{R}}_x$  拟合  $\tilde{\mathbf{R}}_x$ 。与式 (7) 相同, 假设  $\tilde{\mathbf{R}}_x$  仍然由信号和噪声两部分组成, 其中无误差阵列协方差矩阵的信号和噪声分量为  $\tilde{\mathbf{R}}_s$  和  $\tilde{\mathbf{R}}_n$ , 阵列误差表示为  $\mathbf{T}_e$ , 那么  $\tilde{\mathbf{R}}_x$  表示为  $\tilde{\mathbf{R}}_x = \mathbf{T}_e \tilde{\mathbf{R}}_s \mathbf{T}_e^H + \mathbf{T}_e \tilde{\mathbf{R}}_n \mathbf{T}_e^H$ 。根据前文介绍, 理论上  $\tilde{\mathbf{R}}_s$  为 Toeplitz 矩阵, 可以由其第一行元素决定, 假设其第一行元素为  $r$ , 则  $\tilde{\mathbf{R}}_s = \text{Toeplitz}(r)$ , 表示将向量  $r$  中的每个元素沿矩阵的主对角线共轭对称, 转化为 Toeplitz 矩阵。此外,  $\tilde{\mathbf{R}}_s$  是半正定矩阵<sup>[28]</sup>, 用  $\text{Toeplitz}(r) \geq 0$  表示。假设噪声功率向量为  $\sigma$ , 其中的元素均为大于 0 的实数, 则  $\tilde{\mathbf{R}}_n = \text{diag}(\sigma)$ , 并且  $\sigma > 0$ 。根据以上内容, 待拟合矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}_x$  具体表示为  $\tilde{\mathbf{R}}_x = \mathbf{T}_e \text{Toeplitz}(r) \mathbf{T}_e^H + \mathbf{T}_e \text{diag}(\sigma) \mathbf{T}_e^H$ , 利用优化算法 (11) 求解  $r$  和  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} & \min_{r, \sigma} \text{Tr}[\hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_x] + \text{Tr}[(\tilde{\mathbf{R}}_x)^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x], \\ & \text{s.t. } \tilde{\mathbf{R}}_x = \mathbf{T}_e \text{Toeplitz}(r) \mathbf{T}_e^H + \mathbf{T}_e \text{diag}(\sigma) \mathbf{T}_e^H, \\ & \text{Toeplitz}(r) \geq 0, \\ & \sigma > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

由于优化算法 (11) 中目标函数的  $(\tilde{\mathbf{R}}_x)^{-1}$  不能直接求解, 需要引入  $M \times M$  维的  $\mathbf{G}$  矩阵代替  $(\tilde{\mathbf{R}}_x)^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x$ , 并且约束  $\text{Tr}(\mathbf{G}) \geq \text{Tr}[(\tilde{\mathbf{R}}_x)^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x]$ 。由于  $\text{Tr}[(\tilde{\mathbf{R}}_x)^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x]$  等于  $\text{Tr}[\hat{\mathbf{R}}_x^{1/2} (\tilde{\mathbf{R}}_x)^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x^{1/2}]$ , 因此在优化算法中加入约束  $\mathbf{G} \geq \hat{\mathbf{R}}_x^{1/2} (\tilde{\mathbf{R}}_x)^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x^{1/2}$ , 可以用

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \hat{\mathbf{R}}_x^{1/2} \\ \hat{\mathbf{R}}_x^{1/2} & \tilde{\mathbf{R}}_x \end{bmatrix} \geq 0$$

替代。因此, 优化函数 (11) 转化为

$$\begin{aligned} \min_{r, \sigma, G} & \text{Tr} \left[ \widehat{\mathbf{R}}_x^{-1} \widetilde{\mathbf{R}}_x \right] + \text{Tr}[\mathbf{G}], \\ \text{s.t.} & \widetilde{\mathbf{R}}_x = \mathbf{T}_e \text{Toeplitz}(\mathbf{r}) \mathbf{T}_e^H + \mathbf{T}_e \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{T}_e^H, \\ & \text{Toeplitz}(\mathbf{r}) > 0, \quad \boldsymbol{\sigma} > 0, \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \widehat{\mathbf{R}}_x^{1/2} \\ \widehat{\mathbf{R}}_x^{1/2} & \widetilde{\mathbf{R}}_x \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

迭代过程中, 优化算法 (12) 中的  $\mathbf{T}_e$  是已知量, 在第一次迭代中将  $\mathbf{T}_e$  设置为  $M$  维的单位矩阵。式 (12) 是一个半正定凸优化问题<sup>[29]</sup>, 该问题可以用工具箱求解, 例如 SeDumi 软件<sup>[30]</sup> 或 CVX 凸优化工具箱<sup>[31]</sup>。利用求解的  $r$  构建无噪声协方差矩阵  $\widetilde{\mathbf{R}}_s = \text{Toeplitz}(\mathbf{r})$ , 并利用  $\widetilde{\mathbf{R}}_s$  进行 MUSIC 方法的方位估计:

$$\widehat{\theta} = \min_{\theta} \mathbf{a}^H(\theta) \widetilde{\mathbf{E}}_n \widetilde{\mathbf{E}}_n^H \mathbf{a}(\theta). \quad (13)$$

对  $\widetilde{\mathbf{R}}_s$  进行特征值分解,  $\widetilde{\mathbf{E}}_n$  为  $\widetilde{\mathbf{R}}_s$  的噪声子空间,  $\widetilde{\mathbf{R}}_s$  可以获得比  $\widehat{\mathbf{R}}_x$  更准确的方位估计结果, 这为后续更准确地估计阵列误差奠定基础。

## 2.2 估计阵列幅度相位误差

利用特征结构配置法<sup>[11]</sup> 和上小节中的估计方位  $\widehat{\theta}$  求解阵列幅度相位误差。将未校正阵列协方差矩阵  $\widehat{\mathbf{R}}_x$  进行特征值分解, 理论上  $\widehat{\mathbf{R}}_x$  的信号子空间  $\widehat{\mathbf{E}}_s$  与  $\widehat{\mathbf{A}}(\vartheta)$  张成的空间相同, 并且信号子空间  $\widehat{\mathbf{R}}_x$  与噪声子空间  $\widehat{\mathbf{E}}_n$  正交, 因此  $\widehat{\mathbf{E}}_n$  与  $\widehat{\mathbf{A}}(\vartheta)$  张成的空间正交, 如果  $\text{span}(\mathbf{A})$  表示利用矩阵  $\mathbf{A}$  中的列向量张成的空间, 则  $\text{span}(\widehat{\mathbf{E}}_n) \perp \text{span}(\widehat{\mathbf{A}}(\vartheta)) = \text{span}(\mathbf{T}_e \mathbf{A}(\vartheta))$ 。利用该正交特性构建代价函数:

$$J = \left\| \widehat{\mathbf{E}}_n^H \mathbf{T}_e \mathbf{A}(\vartheta) \right\|_F^2 = \sum_{k=1}^K \left\| \widehat{\mathbf{E}}_n^H \mathbf{T}_e \mathbf{a}(\theta_k) \right\|_2^2, \quad (14)$$

其中,  $\|\mathbf{A}\|_F$  和  $\|\mathbf{a}\|_2$  分别是矩阵  $\mathbf{A}$  和向量  $\mathbf{a}$  的 F 范数和 2 范数。对式 (14) 中  $\mathbf{T}_e \mathbf{a}(\theta_k)$  进行变换, 即  $\mathbf{T}_e \mathbf{a}(\theta_k) = \text{diag}(\mathbf{a}(\theta_k)) \cdot \mathbf{t}$ , 其中  $\text{diag}(\mathbf{a}(\theta_k))$  是将  $\mathbf{a}(\theta_k)$  对角化的  $M \times M$  维矩阵, 将其简单表示为  $\mathbf{D}_k$ 。 $\mathbf{t}$  为  $\mathbf{T}_e$  对角线元素构成的列向量, 即  $\mathbf{t} = [a_1 e^{j\theta_1}, \dots, a_M e^{j\theta_M}]^T$ , 则式 (14) 可转化为

$$J = \sum_{k=1}^K \left\| \widehat{\mathbf{E}}_n^H \mathbf{D}_k \mathbf{t} \right\|_2^2 = \mathbf{t}^H \left[ \sum_{k=1}^K \mathbf{D}_k^H \widehat{\mathbf{E}}_n \widehat{\mathbf{E}}_n^H \mathbf{D}_k \right] \mathbf{t}. \quad (15)$$

利用式 (13) 获得的估计方位  $\widehat{\theta}$  估计目标个数  $K$  并获得  $\mathbf{D}_k$ , 对  $\widehat{\mathbf{R}}_x$  特征值分解得到  $\widehat{\mathbf{E}}_n$ , 因此可以求解式 (15) 中括号内的结果, 并将其表示为

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^K \mathbf{D}_k^H \widehat{\mathbf{E}}_n \widehat{\mathbf{E}}_n^H \mathbf{D}_k, \quad (16)$$

代价函数转化为  $J = \mathbf{t}^H \mathbf{U} \mathbf{t}$ 。以第一个阵元为标准, 假设第一个阵元没有误差, 即  $\mathbf{t}(1) = a_1 e^{j\theta_1} = 1$ , 令  $\mathbf{w} = [1, 0, \dots, 0]^T$  为第一个数值为 1、其余数值都为 0 的  $M$  维列向量, 则  $\mathbf{t}^H \mathbf{w} = 1$ 。利用如下受约束的二次型最小化问题求解  $\mathbf{t}$ :

$$\mathbf{t} = \min_{\mathbf{t}} \mathbf{t}^H \mathbf{U} \mathbf{t}, \quad \text{s.t. } \mathbf{t}^H \mathbf{w} = 1. \quad (17)$$

式 (17) 可以利用拉格朗日乘子法求解:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{U}^{-1} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{U}^{-1} \mathbf{w}}, \quad (18)$$

$\mathbf{t}$  为  $\mathbf{T}_e$  的对角线元素, 因此  $\mathbf{T}_e = \text{diag}(\mathbf{t})$ 。

## 2.3 迭代提高 $\mathbf{T}_e$ 和 $\widetilde{\mathbf{R}}_s$ 的精度

利用迭代的方式使  $\mathbf{T}_e$  更加精确, 并且使  $\widetilde{\mathbf{R}}_s$  趋近于无误差阵列的协方差矩阵  $\mathbf{R}_s$ 。迭代流程如下, 其中  $\mathbf{A}^{[i]}$  表示  $\mathbf{A}$  的第  $i$  次迭代的结果。

初始化:  $\mathbf{T}_e^{[1]}$  为  $M$  维单位矩阵;

步骤 1. 求解实际未校正阵列采集信号的协方差矩阵  $\widehat{\mathbf{R}}_x$ , 并将  $\widehat{\mathbf{R}}_x$  和  $\mathbf{T}_e^{[1]}$  代入优化算法 (12) 中求解无噪声协方差矩阵  $\widetilde{\mathbf{R}}_s^{[1]} = \text{Toeplitz}(\mathbf{r})$ ;

步骤 2. 根据式 (13), 将  $\widetilde{\mathbf{R}}_s$  应用于 MUSIC 方法估计目标方位  $\widehat{\theta}^{[1]}$ ;

步骤 3. 对  $\widehat{\mathbf{R}}_x$  特征值分解得到其噪声子空间  $\widehat{\mathbf{E}}_n$ , 并且利用  $\widehat{\theta}^{[1]}$  求解  $\mathbf{D}_k$ , 将  $\widehat{\mathbf{E}}_n$  和  $\mathbf{D}_k$  用于式 (16) 求解  $\mathbf{U}^{[1]}$  矩阵;

步骤 4. 将  $\mathbf{U}^{[1]}$  代入式 (18) 求解  $\mathbf{t}^{[1]}$ ;

步骤 5. 判断是否进行下一次迭代, 设定一个极小阈值  $\varepsilon$ , 如果  $|\mathbf{t}^{[i]} - \mathbf{t}^{[i-1]}| > \varepsilon$ , 那么更新  $\mathbf{T}_e^{[i+1]} = \text{diag}(\mathbf{t}^{[i]})$ , 并返回步骤 1 进行下一次迭代; 如果  $|\mathbf{t}^{[i]} - \mathbf{t}^{[i-1]}| < \varepsilon$ , 则停止迭代。

迭代过程中,  $\mathbf{T}_e$  和  $\widetilde{\mathbf{R}}_s$  都逐渐精确, 最终本文方法实现了从未校正阵列的协方差矩阵中分离出无误差阵列协方差矩阵和幅度相位误差矩阵。如果共进行了  $I$  次迭代, 最终  $\mathbf{T}_e^{[I]}$  为估计阵列误差, 并且利用  $\widetilde{\mathbf{R}}_s^{[I]}$  进行方位估计。

$\widetilde{\mathbf{R}}_s$  能够改善方位估计性能有以下两个原因: 其一,  $\widetilde{\mathbf{R}}_s$  校正了阵列误差; 其二, MUSIC 算法的分辨力受噪声影响较大, 优化算法 (12) 分离了信号和噪声, 仅利用重构协方差矩阵的信号分量  $\widetilde{\mathbf{R}}_s$  进行方位估计可以降低噪声功率, 提高信噪比, 进一步改善方位估计性能。

文献 [11, 16] 也应用了 2.2 节中的特征结构配置法, 但是相比于这两个方法, 本文方法有较大优势: 由于代价函数 (14) 中包含了目标方位的导向矢量  $\mathbf{a}(\theta_k)$ , 因此  $\theta_k$  的精度关系着  $\mathbf{T}_e$  的精度, 如果不能准确

估计目标方位,则无法准确估计阵列误差。为避免 $\theta_k$ 误差的影响,文献[11]引入方位精确已知的校正源,并利用特征结构配置法对阵列进行有源校正。文献[16]在文献[11]的基础上,利用实际未校正阵列的估计方位 $\theta_k$ 进行迭代,实现了阵列自校正,然而当阵元个数少、阵列误差较大,或环境信噪比低时,未校正阵列不能获得准确的 $\theta_k$ ,导致该方法无法获得准确的 $T_e$ ,而利用不准确的 $T_e$ 进行迭代可能进一步降低方位估计性能。相比于文献[11,16],本文方法利用协方差矩阵重构方法获取近似无误差无噪声的协方差矩阵 $\tilde{R}_s$ , $\tilde{R}_s$ 弱化了阵列误差,能够获得比 $\hat{R}_s$ 更精确的估计方位,精确的估计方位可以改善特征结构配置法的阵列校正性能,在迭代的过程中目标方位和阵列误差的估计精度均逐渐提高。

### 3 仿真分析

使用 MUSIC 方法考察本文方法的阵列误差校正能力,以及阵列校正后的方位估计性能。仿真中,接收信号都是频率为 3 kHz 的窄带信号,且具有随机相位,信号快拍数为 500,阵元间距为 3 kHz 的半波长,即 0.25 m。将本文方法与文献[16]和文献[21]进行对比。

#### 3.1 方位谱图

空间中有两个目标,其方位分别是 $10^\circ$ 和 $17^\circ$ ,信噪比为 0 dB,阵元个数为 10。假设第一个阵元没有误差,阵列幅度误差 $a_1$ 至 $a_{10}$ 为[1, 0.7, 0.4, 3, 1.8, 0.9, 1.2, 1.5, 2, 1.6],相位误差 $e^{j\eta_m}$ 中的 $\eta_m$ 为 $[0^\circ, 30^\circ, -10^\circ, 10^\circ, -20^\circ, 16^\circ, -10^\circ, 20^\circ, 10^\circ, 15^\circ] \times \pi/180^\circ$ 。图 1 显示阵列校正前后的 MUSIC 方位谱,其中黑色圆圈表示目标真实方位,未校正阵列双目标峰值处凹陷的最小幅度约为-0.9 dB,几乎无法区分两个目标,本文方法和文献[16]方法都能清晰地分辨双目标,但本文方法的估计精度高于文献[16]。

#### 3.2 阵列误差估计偏差以及方位估计性能

阵列幅度相位误差的真值和估计值为 $T_e$ 和 $\hat{T}_e$ ,将 $T_e$ 和 $\hat{T}_e$ 之间的偏差称为阵列误差的估计偏差(Array Error estimation Deviation, AED),其计算方式为

$$E_T = |T_e - \hat{T}_e|_F / |T_e|_F. \quad (19)$$

显然重构无误差阵列协方差矩阵 $\tilde{R}_s$ 越接近 $R_s$ ,则本文方法的方位估计结果越好,将 $\tilde{R}_s$ 与 $R_s$ 的偏差称为协方差矩阵的估计偏差(Covariance Matrix estimation Deviation, CMD),其计算方式为

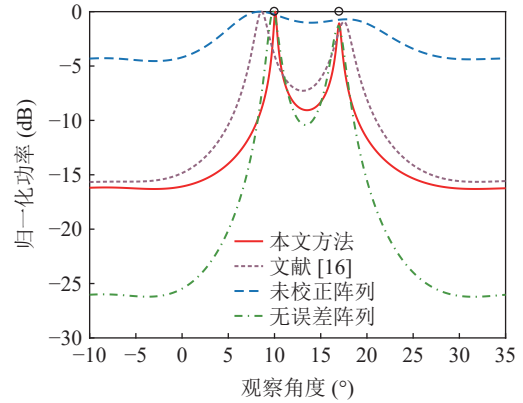


图 1 阵列校正前后的 MUSIC 方位谱

$$E_R = |R_s - \tilde{R}_s|_F / |R_s|_F. \quad (20)$$

考察当空间中存在两个目标时,阵列校正前后的方位估计精度和分辨概率。利用均方误差(MSE)来判断方位估计精度,如果方位估计结果满足式(21),则判定为成功分辨两个目标<sup>[27]</sup>:

$$|\hat{\theta}_{1t} - \theta_1| + |\hat{\theta}_{2t} - \theta_2| < |\theta_1 - \theta_2|, \quad (21)$$

其中, $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 表示两个目标真实方位, $\hat{\theta}_{1t}$ 和 $\hat{\theta}_{2t}$ 分别表示第 $t$ 次蒙特卡罗实验的两个目标的估计方位。如果总共进行 $F$ 次试验,其中有 $f$ 次试验的估计结果满足式(21),那么分辨概率为 $f/F$ ,图中的每个结果都进行 200 次独立蒙特卡罗实验。

假设第一个阵元没有误差,其他阵元均具有随机的幅度相位误差,第 $m$ 个阵元的幅度误差 $a_m$ 是 0 至 5 之间的随机数,相位误差用角度度量, $e^{j\eta_m}$ 中的 $\eta_m$ 为 $-30^\circ \times \pi/180^\circ$ 至 $30^\circ \times \pi/180^\circ$ 之间的随机数。

##### 3.2.1 迭代次数

假设阵元个数为 10,两个目标的方位分别是 $10^\circ$ 和 $17^\circ$ ,信噪比为 10 dB,图 2 是本文方法和文献[16]的 AED 和 CMD 随迭代次数变化情况,迭代次数从 1 增加至 50。本文方法比文献[16]更快达到稳态,文献[16]方法需要 16 次迭代满足 $|t^{[i]} - t^{[i-1]}| < 10^{-4}$ ,而本文方法仅需 9 次迭代。另外,本文方法具有更低的 AED,估计 $\hat{T}_e$ 接近理论 $T_e$ 。随着迭代次数增加, $\tilde{R}_s$ 与 $R_s$ 的偏差逐渐降低,当迭代次数大于 13 时偏差最小,约为 0.09。由图 2 可见,本文方法成功地分离了 $R_s$ 和 $T_e$ 。

由于文献[21]只能获得估计方位,无法求解具体的阵列误差,因此关于 AED 和 CMD 的仿真中不展示文献[21]的结果。由于理论上 $\tilde{R}_s$ 中既没有阵列误差,也没有噪声,利用 $\tilde{R}_s$ 进行方位估计可以获得良好性能。下面考察方位估计性能随阵元个数、信噪比和双目标方位角度间隔的变化情况,以下仿真均设置阈值 $\varepsilon$ 为 $10^{-4}$ 。

3.2.2 阵元个数

假设空间中有两个目标, 其方位分别是  $10^\circ$  和  $17^\circ$ , 信噪比为 10 dB, 阵元个数从 5 增加到 20。图 3 和图 4 是本文方法的 AED、CMD 和 DOA 估计性能随阵元个数的变化情况。图 3(a) 中随着阵元个数增加, 本文方法和文献 [16] 的 AED 都逐渐减小, 本文算法具有更高的 AED, 尤其当阵元个数较小时本文方法有更大优势。图 3(b) 中本文方法的 CMD 小于  $0.2$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_s$  与  $\mathbf{R}_s$  近似。图 4 中无误差阵列具有 100% 的分辨概率和较高的方位估计精度, 而未校正阵列当阵元个数大于 11 时才能具有大于 0.9 的分辨概率。

文献 [16] 和 [21] 都能提高分辨概率, 本文方法的分辨概率和估计精度均大于其他两种方法, 且分辨概率近似为 1。此外, 文献 [21] 更适用于部分未校正阵列, 当阵元个数较多, 并且所有阵元都具有误差时, 该方法性能退化, 因此当阵元个数大于 11, 文献 [21] 的估计误差大于未校正阵列。

3.2.3 信噪比

假设阵元个数为 10, 两个目标的方位分别是  $10^\circ$  和  $17^\circ$ , 信噪比从  $-10$  dB 增加至 20 dB。图 5 和图 6 是本文方法的 AED、CMD 和 DOA 估计性能随信噪比的变化情况。图 5 中, 本文方法的 AED 和

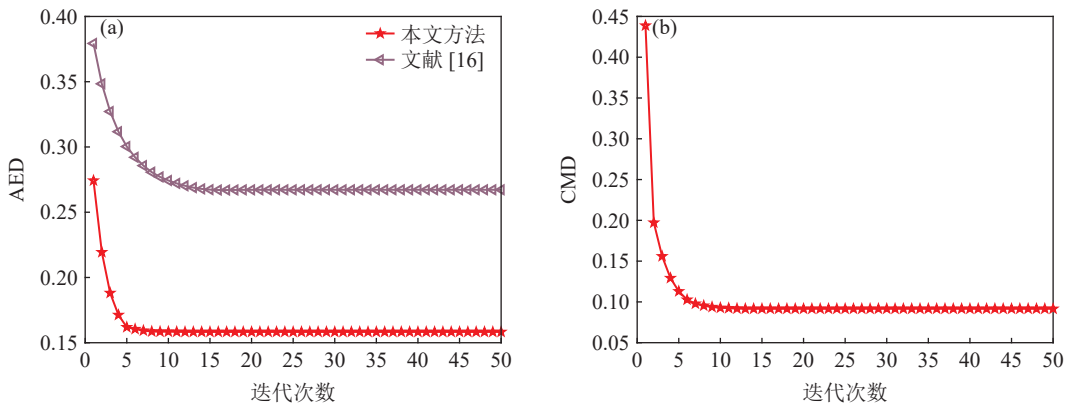


图 2 阵列校正性能随迭代次数变化情况 (a) 阵列误差的估计偏差 (AED); (b) 协方差矩阵的估计偏差 (CMD)

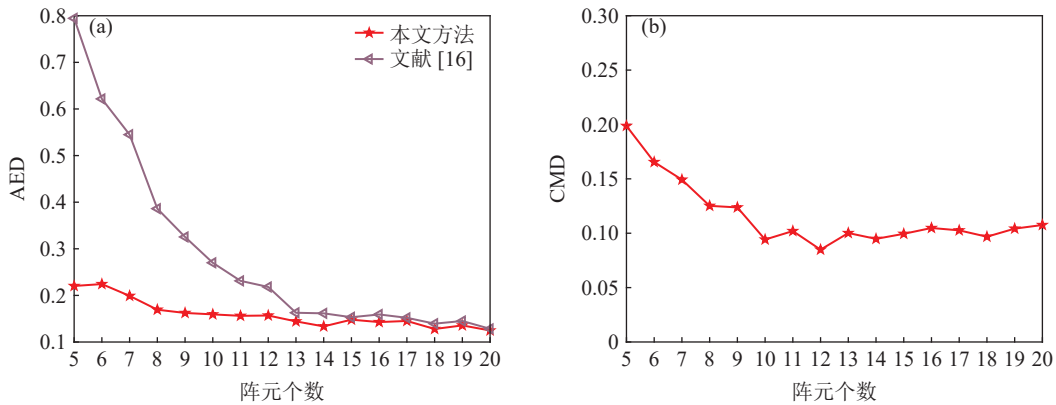


图 3 阵列校正性能随阵元个数变化情况 (a) 阵列误差的估计偏差 (AED); (b) 协方差矩阵的估计偏差 (CMD)

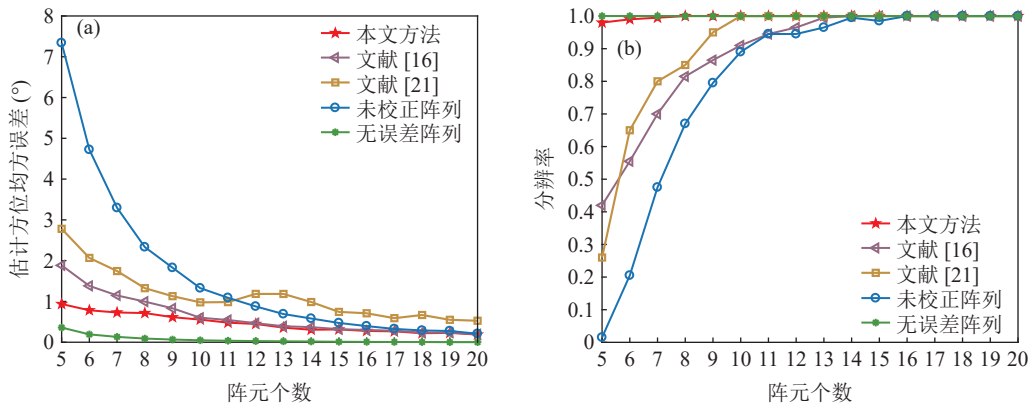


图 4 方位估计性能随阵元个数变化情况 (a) 估计方位均方误差; (b) 分辨概率

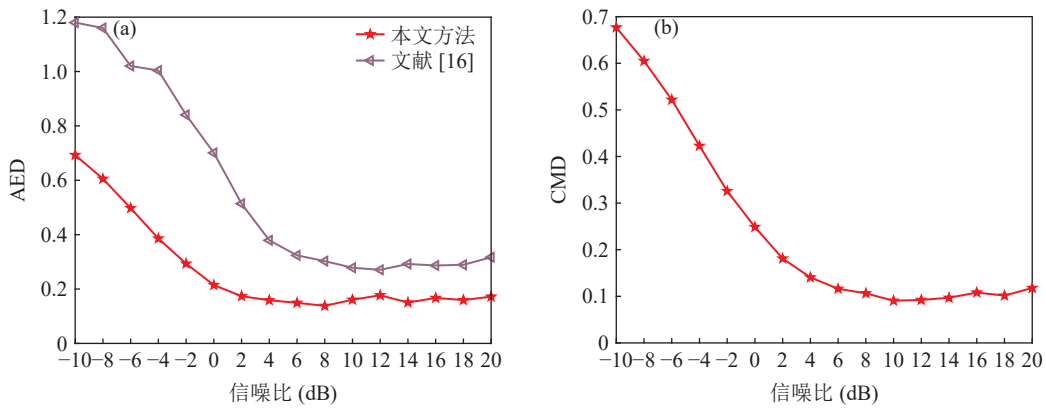


图 5 阵列校正性能随信噪比变化情况 (a) 阵列误差的估计偏差 (AED); (b) 协方差矩阵的估计偏差 (CMD)

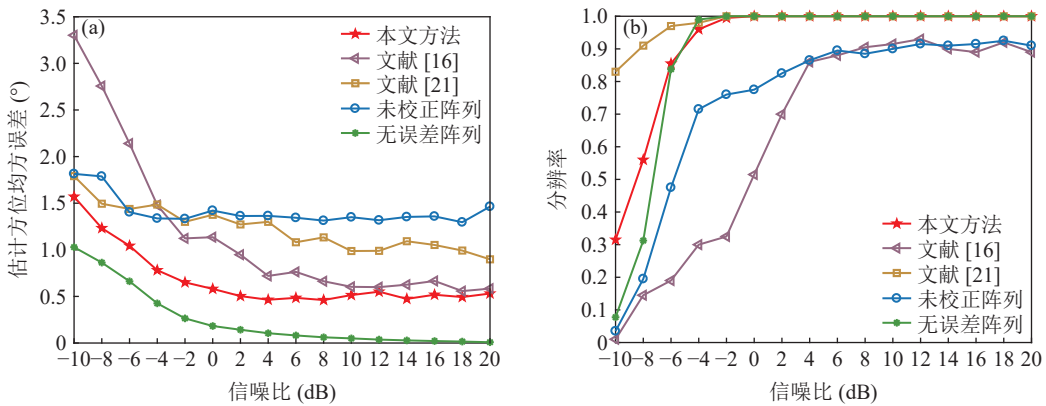


图 6 方位估计性能随信噪比变化情况 (a) 估计方位 MSE; (b) 分辨率

CMD 都随着信噪比增加而逐渐降低, 本文方法的 AED 比文献 [16] 更低。图 6 中, 文献 [16] 不能改善分辨概率, 当信噪比小于 4 dB, 其分辨概率小于未校正阵列, 并且当信噪比小于 -4 dB, 其 MSE 小于未校正阵列, 其原因在 2.3 节中说明, 即如果信噪比降低, 未校正阵列不能获得准确的  $\theta_k$  和  $T_e$ , 迭代过程反而降低方位估计性能。由于文献 [21] 利用压缩感知方位估计进行阵列校正, 因此该方法具有最高的分辨概率。本文方法的估计精度和分辨概率均远高于未校正阵列, 当信噪比小于 -6 dB, 本文方法的分辨概

率甚至比无误差阵列更高, 这是因为式 (3) 中无误差阵列的协方差矩阵  $R_x$  中有噪声分量  $R_n$ , 而本文方法的重构协方差矩阵  $\tilde{R}_s$  近似于  $R_s$ , 只有信号分量, 因此当信噪比低时, 本文方法受噪声影响更小, 分辨概率更高。

### 3.2.4 双目标方位角度间隔

假设阵元个数为 10, 信噪比为 10 dB。空间中有两个目标, 其中一个目标方位为  $10^\circ$ , 另一个目标方位从  $14^\circ$  增加至  $25^\circ$ , 因此双目标方位角度间隔从  $4^\circ$  增加至  $15^\circ$ 。图 7 和图 8 是本文方法的 AED、

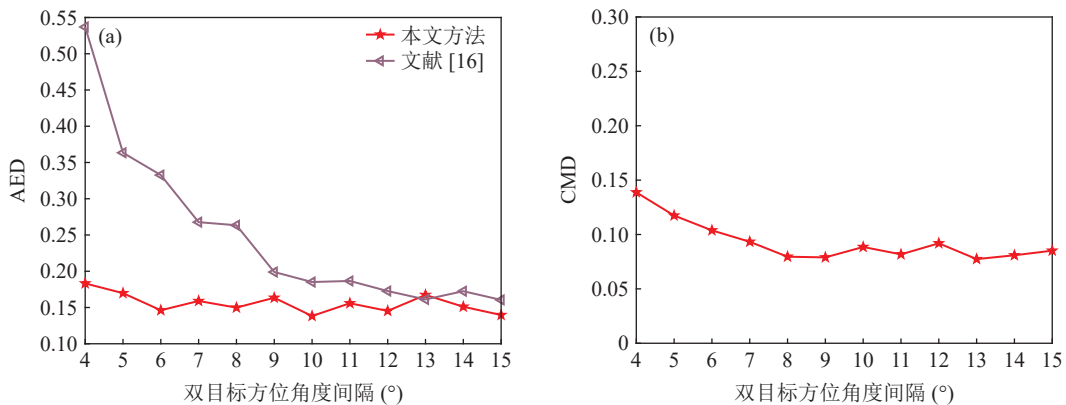


图 7 阵列校正性能随双目标方位角度间隔变化情况 (a) 阵列误差的估计偏差 (AED); (b) 协方差矩阵的估计偏差 (CMD)

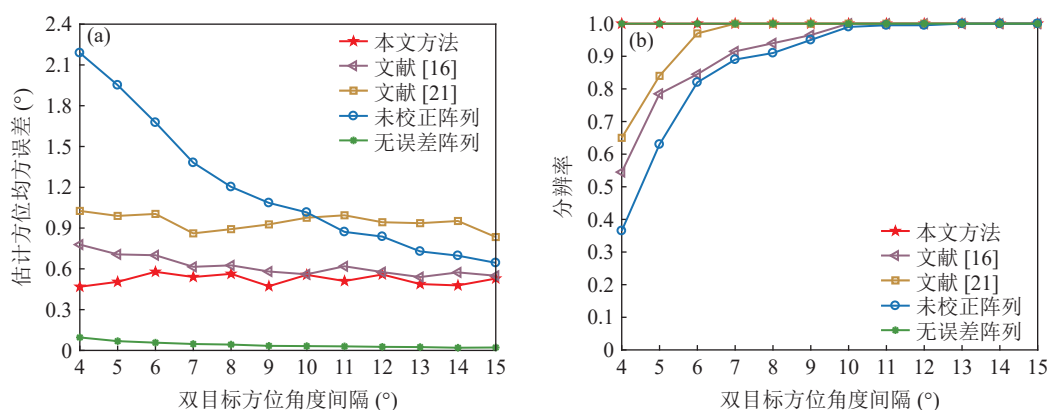


图8 方位估计性能随双目标方位角度间隔变化情况 (a) 估计方位 MSE; (b) 分辨概率

CMD 和 DOA 估计性能随双目标方位角度间隔的变化情况。图 7 中, 本文方法具有比文献 [16] 更低的 AED, 并且本文方法的 CMD 小于 0.15,  $\tilde{\mathbf{R}}_s$  与  $\mathbf{R}_s$  近似。图 8 中, 文献 [16] 的分辨概率仅略高于未校正阵列, 而本文方法在任何角度间隔下的分辨概率都为 1, 文献 [16] 和本文方法的 MSE 近似, 均低于未校正阵列。文献 [21] 的分辨概率高于文献 [16], 但是当角度间隔大于  $11^\circ$  时, 其估计误差高于未校正阵列。

## 4 湖上试验数据分析

通过湖试数据处理结果进一步考察本文方法的性能, 试验地点为湖北宜昌清江, 试验态势和方位估计结果见下文。

### 4.1 湖试试验态势

如图 9 所示, 试验中两艘试验船分别携带一个均匀直线声压阵和一个宽带声源, 声压阵有 8 个阵元, 宽带声源每秒发射一次归一化带宽为 0.15 至 0.21 的宽带随机噪声, 归一化频率为信号频率与采样频率的比值。声源和阵列均吊放于水下约 80 m 处, 两船距离约为 700 m。另外, 试验记录显示有一个干扰船在阵列和声源中间移动, 其方位与声源方位接近。

### 4.2 DOA 估计结果

每秒截取归一化频率为 0.160 至 0.161 的信号进行处理, 其波长近似于阵元间距的二倍, 共观察 30 s 的数据。文献 [16] 是经典的自校正方法, 常用于实际工程中, 图 10 是实际未校正阵列、本文方法和文献 [16] 阵列校正后的 MUSIC 方法的方位历程图, 以及第 1 秒数据的方位谱图。图中未校正阵列的方位谱有较宽的主瓣和较高的旁瓣, 只能检测一个目标, 虽然文献 [16] 降低了主瓣宽度和旁瓣高度,

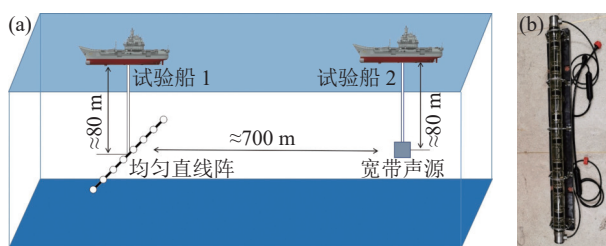


图9 (a) 湖试试验态势; (b) 8 元均匀直线阵图片

但是仍然只能检测一个目标, 而本文方法的方位谱中有两个清晰的峰值, 可以检测出声源和干扰源。

试验中两个试验船上均安装定位系统 (GPS) 来获取阵列和声源的经纬度, 并且在阵列上安装方位姿态仪以实时获取阵列在水下的转动角度, 利用 GPS 和方位姿态仪的数据可以得到声源的真实方位。从图 10 的方位谱中获得阵列校正前后声源的估计方位, 图 11 对比阵列校正前后的估计方位与目标真实方位。图 11(a) 中, 受干扰目标的影响, 未校正阵列和文献 [16] 的估计方位偏离真实方位; 而图 11(b) 中, 红色的估计方位与真实方位几乎一致, 红色轨迹即为声源, 黄色轨迹方位即为干扰船。湖试结果表明, 本文方法可以有效地校正阵列, 提高 MUSIC 方法的分辨力和方位估计精度, 有助于区分感兴趣信号和干扰信号。

## 5 结论

针对阵列误差会降低高分辨方位估计方法分辨力的问题, 本文提出了一种无误差阵列协方差矩阵分离的阵列自校正方法。该方法构建了无误差阵列的协方差矩阵重构方法, 并结合特征结构配置以及迭代方法, 实现从未校正阵列的协方差矩阵中分离出无误差阵列的协方差矩阵和幅度相位误差矩阵, 同时求解目标方位和阵列幅相误差。由仿真以及湖试数据处理结果可见, 本文方法能够准确地估计阵

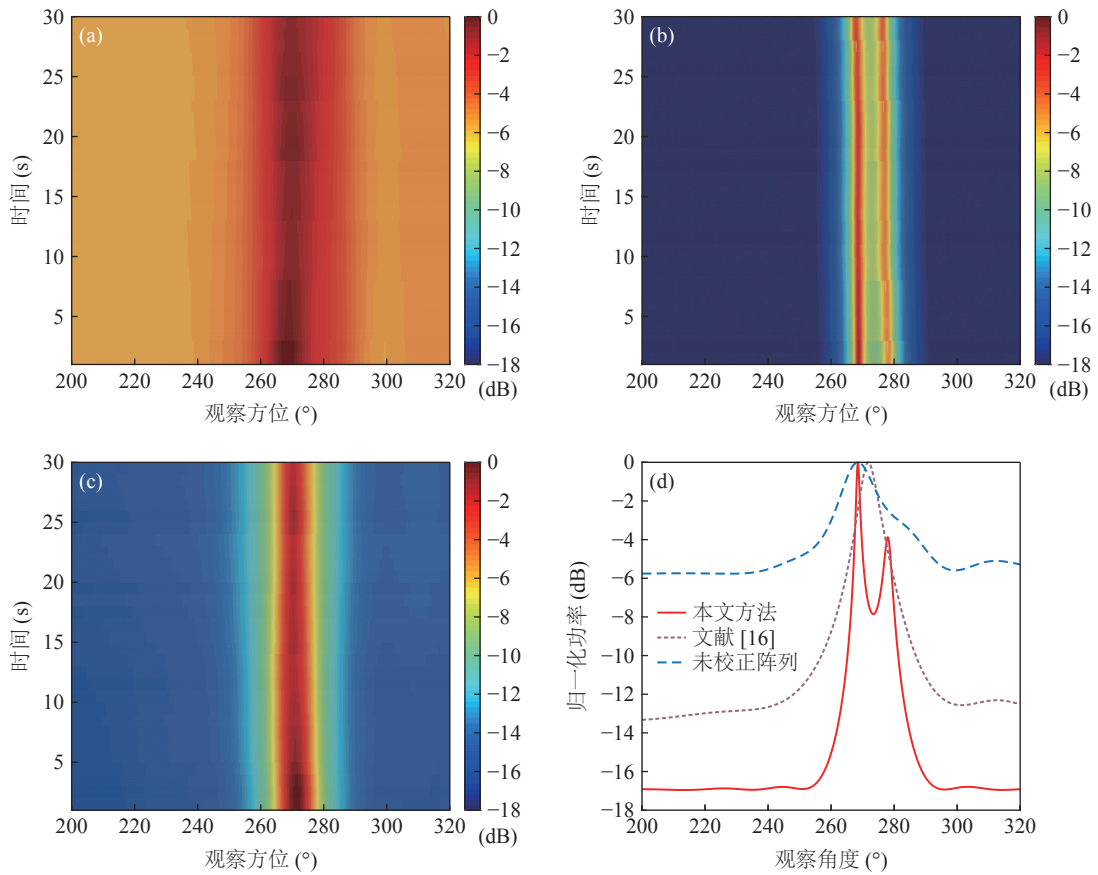


图 10 (a) 未校正阵列的方位历程图; (b) 本文方法的方位历程图; (c) 文献 [16] 的方位历程图; (d) 第 1 秒数据的方位谱图

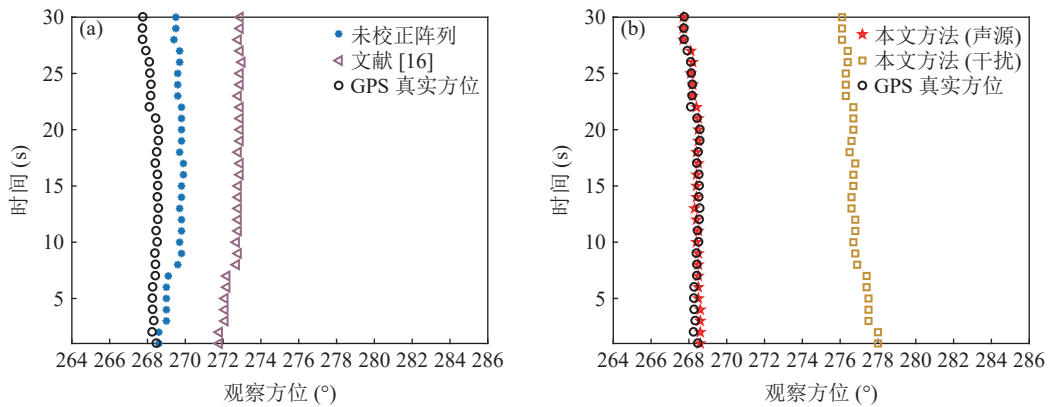


图 11 阵列校正前后结果对比 (a) 未校正阵列和文献 [16] 的估计方位; (b) 本文方法的估计方位

列误差, 且重构的协方差矩阵近似于无误差阵列的协方差矩阵, 将其用于高分辨方位估计方法能够改善方位估计的分辨力和估计精度。相比于传统自校正方法, 该方法的优势在于避免直接利用未校正阵列的目标估计方位进行阵列校正, 而是首先弱化阵列误差, 改善方位估计精度, 进而提高阵列校正性能, 因此当阵元个数少、信噪比低时, 该方法的阵列校正性能优于传统自校正方法。

参 考 文 献

1 Sun S B, Zhang X Y, Zheng C, *et al.* Underwater acoustic localiz-

ation of the black box based on generalized second order time difference of arrival (GSTDOA). *IEEE J. Oceanic Eng.*, 2020; **45**(4): 1268–1279

2 Wagner M, Park Y, Gerstoft P. Gridless DOA estimation and Root-MUSIC for non-uniform linear arrays. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2021; **69**: 2144–2157

3 王燕, 赵磊, 郝宇, 等. 观测平台转向时稀疏贝叶斯学习方位估计. *声学学报*, 2022; **47**(4): 432–439

4 Cox H, Zeskind R M, Owen M H. Robust adaptive beamforming. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, 1987; **35**(10): 1365–1376

5 Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proc. IEEE*, 1969; **57**(8): 1408–1418

- 6 Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1986; **34**(3): 276–280
- 7 李廷伟, 朱炬波, 叶帆. FOC-MUSIC 与 MUSIC 算法的稳健性对比分析. *雷达科学与技术*, 2006; **4**(1): 46–49
- 8 梁国龙, 邱龙皓, 邹男. 基于稀疏信号重构的阵元位置误差校正方法. *声学学报*, 2017; **42**(6): 677–684
- 9 Liao B, Chan S C. Direction finding with partly calibrated uniform linear arrays. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2012; **60**(2): 922–929
- 10 姜组, 杨宾. 一种新的多径场景下乘性阵列误差有源校正算法. *信息工程大学学报*, 2022; **23**(2): 129–140
- 11 王敏, 马晓川, 鄢社锋, 等. 阵列幅度/相位误差的有源校正新方法. *信号处理*, 2015; **31**(11): 1389–1395
- 12 张柯, 王闯, 付进. 声矢量阵阵元位置及幅相误差有源校正算法. *应用声学*, 2015; **34**(5): 457–464
- 13 Li Y J, Lee K, Bresler Y. Blind gain and phase calibration via sparse spectral methods. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2019; **65**(5): 3097–3123
- 14 Song S, Ma X F, Sheng W X, *et al.* Maximum likelihood sensor array calibration using non-approximate Hessian matrix. *IEEE Signal Process. Lett.*, 2021; **28**: 688–692
- 15 Wang K, Yi J X, Feng C, *et al.* Array errors and antenna element patterns calibration based on uniform circular array. *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.*, 2021; **20**(6): 1063–1067
- 16 Weiss A J, Friedlander B. Eigenstructure methods for direction finding with sensor gain and phase uncertainties. *Circuits Syst. Signal Process.*, 1990; **9**(3): 271–300
- 17 Kim J, Yang H J, Jung B W, *et al.* Blind calibration for a linear array with gain and phase error using independent component analysis. *IEEE Antennas Wirel. Propag.*, 2010; **9**: 1259–1262
- 18 Liu J, Wu X, Emery W J, *et al.* Direction-of-arrival estimation and sensor array error calibration based on blind signal separation. *IEEE Signal Process. Lett.*, 2017; **24**(1): 7–11
- 19 林潇, 薛敬宏, 乔晓林. 基于降维的极化敏感阵列幅相误差自校正算法. *现代雷达*, 2020; **42**(10): 51–56
- 20 Liu A, Liao G, Zeng C, *et al.* An eigenstructure method for estimating DOA and sensor gain-phase errors. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2011; **59**(12): 5944–5956
- 21 Wang B, Zhang Y D, Wang W. Robust DOA estimation in the presence of miscalibrated sensors. *IEEE Signal Process. Lett.*, 2017; **24**(7): 1073–1077
- 22 Crocco M, Trucco A. Stochastic and analytic optimization of sparse aperiodic arrays and broadband beamformers with robust super directive patterns. *IEEE Trans. Audio Speech Lang. Process.*, 2012; **20**(9): 2433–2447
- 23 Gu Y J, Leshem A. Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix reconstruction and steering vector estimation. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2012; **60**(7): 3881–3885
- 24 Mohammadzadeh S, Nascimento V H, Lamare R C, *et al.* Maximum entropy-based interference-plus-noise covariance matrix reconstruction for robust adaptive beamforming. *IEEE Signal Process. Lett.*, 2020; **27**: 845–849
- 25 Qiao H, Pal P. Gridless line spectrum estimation and low-rank Toeplitz matrix compression using structured samplers: A regularization-free approach. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2017; **65**(9): 2221–2236
- 26 Zhang Q, Abeida H, Ming X, *et al.* Fast implementation of sparse iterative covariance-based estimation for source localization. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2012; **131**(2): 1249–1259
- 27 Zhang G P, Liu K X, Fu J, *et al.* Covariance matrix reconstruction method based on amplitude and phase constraints with application to extend array aperture. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2022; **151**(5): 3164–3176
- 28 Yang Z, Xie L, Zhang C. A discretization-free sparse and parametric approach for linear array signal processing. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2014; **62**(19): 4959–4973
- 29 Candes E J, Fernandez-Granda C. Towards a mathematical theory of super-resolution. *Commun. Pure Appl. Math.*, 2014; **67**(6): 906–956
- 30 Sturm J F. Using SeDuMi 1.02, A matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimiz. Methods Softw.*, 1999; **11**: 625–653
- 31 Grant M, Boyd S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, Version 2.2. (2020-1-28) [2022-12-13]. <http://cvx.com/cvx/>